



KERNFORSCHUNGSANLAGE JÜLICH  
GESELLSCHAFT MIT BESCHRÄNKTER HAFTUNG  
Zentralinstitut für Angewandte Mathematik

**Zur optimalen  
Regelung von Xenonschwingungen  
großer Leistungsreaktoren**

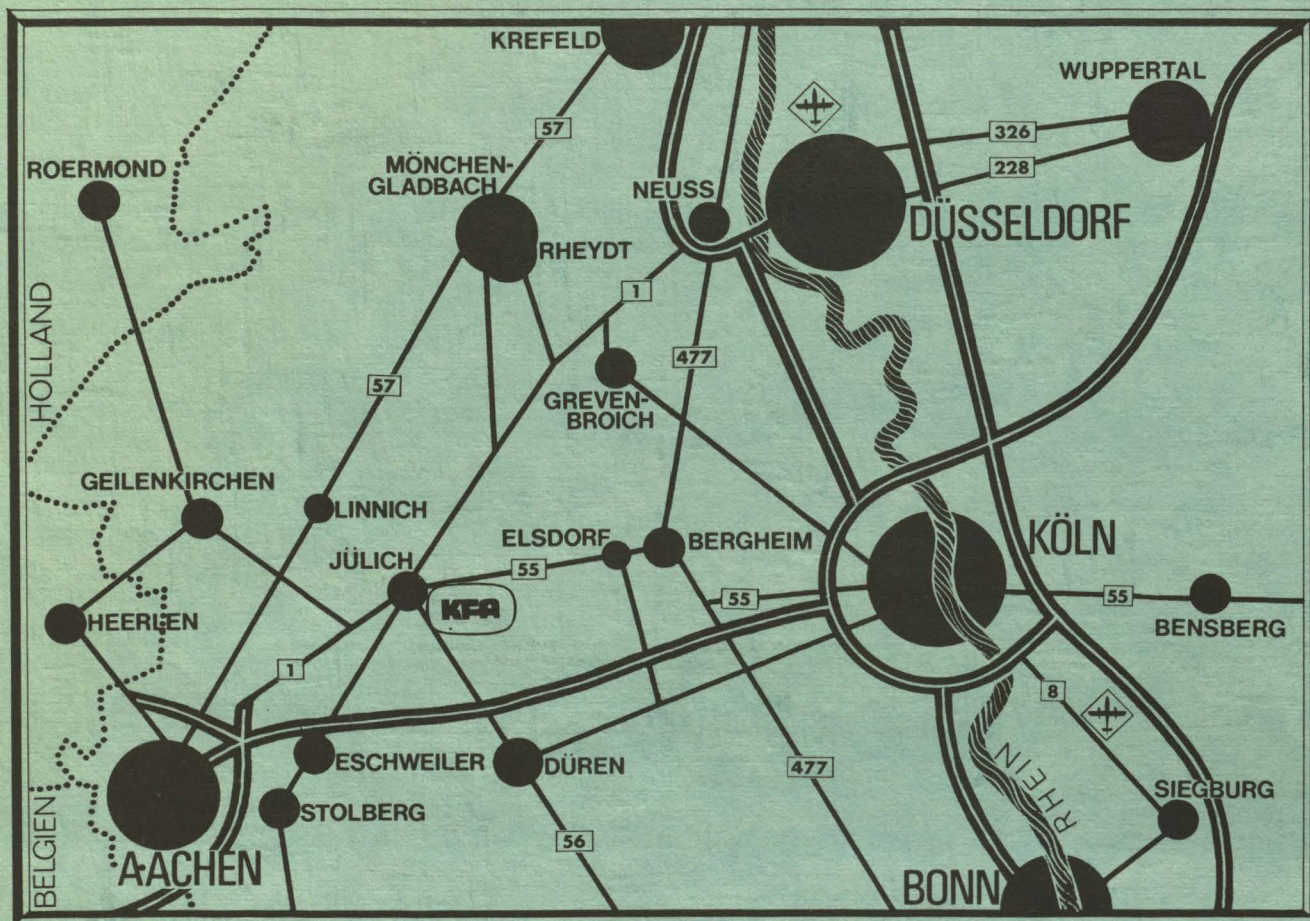
von

W. Hanke

Jül - 1222  
Juli 1975

Als Manuskript gedruckt





## **Berichte der Kernforschungsanlage Jülich – Nr. 1222**

Zentralinstitut für Angewandte Mathematik Jül – 1222

Dok.: HTGR-Type Reactor - Reactor Dynamics  
 Xenon Oscillation  
 Optimal Control  
 Mathematical Model - Parameter Study  
 Computer Calculation

Im Tausch zu beziehen durch: ZENTRALBIBLIOTHEK der Kernforschungsanlage Jülich GmbH,  
 Jülich, Bundesrepublik Deutschland

**Zur optimalen  
Regelung von Xenonschwingungen  
großer Leistungsreaktoren**

von

W. Hanke

### Abstract

The problem of the optimal control of Xenon oscillations is solved both as a minimization problem with an integral performance index and as a minimal time control problem.

Results for the optimal control rod behaviour and for the influence of the rod strength and the rod position are given for a one-dimensional slab reactor.

A simple strategy is given, which is capable of attaining the calculated minimum.

### Zusammenfassung

Das Problem der optimalen Regelung von Xenonschwingungen wird sowohl als Minimierungsproblem mit integralem Funktional als auch als Endwertkontrollproblem behandelt.

Für einen eindimensionalen Plattenreaktor werden Untersuchungen über das optimale Fahren der Regelstäbe und über den Einfluß der Stabstärke und der Stabpositionierung durchgeführt.

Zum Schluß wird eine einfache Strategie angegeben, die es ermöglicht, das berechnete Optimum zu erreichen.

Diese Arbeit entstand im Rahmen der Zusammenarbeit des Zentralinstituts für Angewandte Mathematik (Direktor: Dr. F. Hoßfeld) und dem Institut für Reaktorentwicklung (Leitung: Prof. Dr. R. Schulten) der Kernforschungsanlage Jülich.

Für ihre Unterstützung und die Übernahme der Referate danke ich den Herren Professoren Dr. R. Schulten und Dr. H. Engels.

Dank schulde ich auch den Herren Dr. G. Ballensiefen und Dr. L. Wolf, mit denen ich oft und lange diskutierte.

Ich bedanke mich bei Herrn R. Kaussen für die Erstellung der Programme und der Bilder.

Zum Schluß gebührt Dank dem ungenannten Mitarbeiter, der mit Fragen belästigt wurde und trotzdem antwortete. Er steht für viele.

## Inhaltsverzeichnis

I	EINLEITUNG	1
§ 1	Problemstellung	1
§ 2	Geschichtliches	2
II	KONTROLLPROBLEM MIT INTEGRALEM KRITERIUM	3
	<u>A kontinuierliche Regelung</u>	
§ 3	Funktional des Optimierungsproblems	3
§ 4	Ortsabhängige Wichtung	7
§ 5	Bestimmung des Optimums	13
§ 6	Einige Eigenschaften des Verfahrens	19
§ 7	Konvergenz und Eindeutigkeit	22
§ 8	Ergebnisse	25
	<u>B räumlich diskrete Regelung (Simulation von Regelstäben)</u>	
§ 9	Räumlich gewichtete Regelung	28
§ 10	Räumlich beschränkte Regelung	30
III	KONTROLLPROBLEM MIT ENDWERTREGELUNG	33
	<u>A Methodik</u>	
§ 11	Motivierung der Endwertregelung	33
§ 12	Stabdarstellung	38
§ 13	Anwendung der Störungstheorie	42
§ 14	Interpretation und Stabilität	48

§ 15	Neues Verfahren	54
§ 16	Hamilton-Prinzip	58
§ 17	Minimierung des Funktionals	61
 <b>B <u>Numerik</u></b>		
§ 18	Ausgangsdaten	64
§ 19	Optimale Regelzeit	69
§ 20	Einfluß der Zielfunktion	71
§ 21	Einfluß der Stabpositionierung	73
§ 22	Einfluß der Stabstärke	75
§ 23	Ergebnisse	77
§ 24	Spline-Interpolation	82
§ 25	Anwendung der Spline-Interpolation	85
§ 26	Strategie zur Bestimmung des Optimums	89
 <b>IV SCHLUSSBETRACHTUNG</b>		 94
§ 27	Zusammenfassung	94
 <b>ANHANG</b>		 96
Optimale Regelung mittels der Variationsrechnung bei Vorgabe der Stäbe		
 <b>LITERATUR</b>		 104
 <b>ABBILDUNGEN</b>		 126



## EINLEITUNG

### § 1 Problemstellung

Ein hinreichend großdimensionierter Leistungsreaktor ist im stationären Zustand nicht mehr im stabilen Gleichgewicht [29, 151, 174].

Der Flußverlauf wird zwar im räumlichen und zeitlichen Mittel dem stationären Wert entsprechen, aber lokal entstehen dadurch periodische Vorgänge [56, 148, 173].

Die Ursache hierfür sind anfallende Spaltprodukte, bzw. Stoffe aus deren Zerfallsreihen [41].

Den größten störenden Einfluß besitzt Xenon, weshalb man Störungen, deren Zeitverhalten zwischen den Zeitmeßstäben für verzögerte Neutronen und denen des Abbrandes liegen, als Xenonschwingungen bezeichnet [117].

Um diese Störungen zu verhindern bzw. abzubauen, gibt es i.a. im Regelmechanismus des Reaktors Xenonstäbe.

Diese Stäbe sollen so gefahren werden, daß die Störungen optimal beseitigt werden.

Unter optimal versteht man, daß eine aus Systemparametern gebildete "Straffunktion" (auch Zielfunktion genannt) minimal wird. Diese Straffunktion ist in weitgehender Übereinstimmung mit der Anschauung zu wählen.

Als Einführung in den Problemkreis sei auf [54] verwiesen.

## § 2 Geschichtliches

Der Xenoneffekt wurde 1955 zum ersten Mal am Schippingport-Reaktor (135 MW<sub>e1</sub>) beobachtet.

Über Xenonschwingungen erschienen 1957 die ersten Arbeiten [56, 161]. RANDALL und ST. JOHN [117] erreichten mittels der Störungstheorie die Linearisierung und benutzten dann die Ljapunofftheorie der Stabilität [77] .

Dieses war der Ausgangspunkt einer Reihe von Arbeiten, die theoretisch und praktisch die Umstände untersuchten, unter denen Schwingungen entstehen. In diesem Zusammenhang sei besonders auf die Literaturangaben von [174] und [151] verwiesen.

Dann ergab sich das Problem der Regelbarkeit. Meistens waren diese Ansätze punktkinetisch. Und erst um 1964 wurde die Ortsabhängigkeit der Schwingungen und die der Regelung zunehmend wichtiger [173] .

1969 erschien dann von STACEY die erste Arbeit über optimale Regelung [148] , die wieder zum Ausgangspunkt vieler Arbeiten wurde. Über die Bang-bang-Regelung haben erstmals 1973 CHRISTIE und PONCELET [31] berichtet.

Die vorliegende Arbeit führt die Methode von STACEY durch ein die Ortsabhängigkeit berücksichtigendes Verfahren weiter, liefert dadurch die Rechtfertigung der Bang-bang-Regelung, untersucht im eindimensionalen Fall die optimalen Schaltzeiten zweier Regelstäbe und gelangt zum Schluß zu einer Strategie, für die sich eine suboptimale Regelung ergibt.

## II Kontrollproblem mit integralem Kriterium

### A kontinuierliche Regelung

#### § 3 Funktional des Optimierungsproblems

Ausgangspunkt sind die zeitabhängige Diffusionsgleichung ohne verzögerte Neutronen +)

$$(3.1) \quad \frac{1}{v} \dot{\phi}(r, t) = D(r) \cdot \Delta \phi(r, t) + \left[ v F(r) - \Sigma(r) - \sigma X(r, t) \right] \cdot \phi(r, t) - u(r, t) \phi(r, t) ,$$

sowie die Jod- und Xenonbilanzgleichungen

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \dot{I}(r, t) &= y_i F(r) \cdot \phi(r, t) - c_i I(r, t) \\ \dot{X}(r, t) &= y_x F(r) \cdot \phi(r, t) + c_i I(r, t) - c_x X(r, t) \\ &\quad - \sigma \cdot X(r, t) \cdot \phi(r, t) \end{aligned}$$

mit den Randwerten

$$(3.3) \quad \phi(r, t) = 0 \text{ auf } \mathcal{R} \text{ (extrapolierter Reaktorrand)} \\ \text{für alle } t$$

und den Anfangswerten

$$(3.4) \quad \begin{aligned} I(r, 0) &= I_0(r) \\ X(r, 0) &= X_0(r) . \end{aligned}$$

Die Ausgangsgrößen seien so gewählt, daß der Reaktor im stationären Betrieb kritisch ist, d.h., daß der kleinste Eigenwert  $k_0$  von

$$(3.5) \quad 0 = D(r) \Delta \phi(r, t) + \left[ \frac{v}{k_i} F(r) - \Sigma(r) - \sigma X(r, t) \right] \phi(r, t)$$

gerade 1 ist. ++)

---

+) Die Erklärung der Symbole erfolgt in [ 54 ]

++) Für num. Rechnungen sind Abweichungen von einigen ‰ erlaubt.



Die für Xenonrechnungen verwendete autonome Form der Diffusionsgleichung

$$(3.6) \quad 0 = D\Delta\phi + (vF - \Sigma - \sigma X)\phi - u\phi \quad +),$$

die in der Kontrolltheorie nicht verwendbar ist, erhält man formal aus (3.1) durch den Grenzübergang

$$v \rightarrow \infty.$$

Wir erheben nun die Forderung, daß innerhalb eines festen vorgegebenen Zeitraumes  $[0, T]$

- 1) das integrierte Quadrat der Flußabweichung vom stationären Verlauf  $N(r)$

$$J_1 = \int_0^T \int_V \left[ \phi(r, t) - N(r) \right]^2 dV dt$$

und

- 2) das integrierte Quadrat des Regelaufwandes  $u(r, t)$

$$J_2 = \int_0^T \int_V \left[ u(r, t) \right]^2 dV dt$$

klein sein sollen.

Da jedoch  $J_1$  und  $J_2$  gegenläufige Forderungen sind, wird man das Minimum der gewichteten Summe zu fordern haben

$$J = J_1 + k^2 J_2 \stackrel{!}{=} \text{Min},$$

wobei  $k$  ein anpassender Gewichtungsfaktor ist.

---

+) Soweit dies nicht mißverständlich ist, werden Argumente fortan weggelassen.

Insgesamt ergibt sich also das positiv definite Kriterium

$$(3.7) \quad J = \int_0^T \int_V \left[ (\phi - N)^2 + k^2 u^2 \right] dV dt = \text{Min} .$$

Zur Motivation dieses Funktional's siehe etwa [53,148] .

Für das Problem (3.2), (3.3), (3.4), (3.6), (3.7) wurde in [54] ein Verfahren angegeben und eine Reihe von Beispielen gerechnet. Im Funktional (3.7) ist  $k$  dimensionsbehaftet und darum auch von Reaktorgrößen abhängig.

Eine Schätzung von  $k$  wurde in [52] durchgeführt. In weiten  $k$ -Bereichen ergeben sich nur schwache Änderungen im Fluß-, Jod- und Xenonverlauf. Der "typische" Flußverlauf dieser Ergebnisse in Abb. 21<sup>+)</sup>  und die typischen Jod- und Xenonverläufe sind in Abb. 19 und 20 wiedergegeben. <sup>++)</sup>

Man erkennt aus den Bildern, daß der stationäre Zustand schnell angestrebt wird.

Somit hat man das Ergebnis:

Die stationäre Flußverteilung als anschauliches Ziel  
ist auch das optimale Ergebnis im Sinne des Funktional's  
(3.7).

Ein Phänomen ist noch zu klären: das Abwandern vom Stationären in der Nähe von  $t = T$ .

Es ist bekannt, daß jede Flußänderung nach der halben Xenonperiode eine Xenonänderung bewirkt hat, die durch die auch ins Funktional eingehende Regelung kompensiert werden muß.

Somit wird die Regelung dann "vernünftig" sein, wenn ihre Folgen noch vom Funktional erfaßt werden. Dies trifft aber um so weniger zu, je mehr sich  $t$  dem Zeitpunkt  $T$  genähert hat.

---

<sup>+)</sup>  Abbildungen des Anhangs

<sup>++)</sup> Zur weiteren Erläuterung der Bilder siehe § 8.

Das bedeutet, daß man einen Zeitraum  $[0, T]$  von ca. 60 Std. zu fordern hat, wenn das Verhalten bis  $t = 50$  Std. untersucht werden soll.



#### § 4 Ortsabhängige Wichtung

Im Funktional (3.7) ist eine orts- und zeitabhängige Wichtung der beiden Funktionen möglich

$$(4.1) \quad J = \int_0^T \int_V \left[ c_1^2(r,t) (\phi - N)^2 + k^2 c_2^2(r,t) u^2 \right] dV dt.$$

Ziel dieser Wichtung ist es, durch geeignete Wahl der Funktionen  $c_1(r,t)$  und  $c_2(r,t)$  das Funktional  $J$  zu einer physikalisch meßbaren Größe und  $k$  zu einem von Reaktorgrößen unabhängigen Vergleichsfaktor zu machen.

Es werden z.B. Reaktionsraten verglichen, wenn  $c_2$  ein geeigneter Fluß und  $c_1$  ein geeigneter Querschnitt ist, z.B.:

$$c_1 = F(r) \text{ oder } c_1 = \Sigma(r)$$

und

$$c_2 = N(r) \text{ oder } c_2 = \phi(r,t).$$

Dann ist  $k$  dimensionslos.

Da die Funktion  $\frac{\Sigma(r)}{F(r)} = f(r)$  fast konstant ist (in Abhängigkeit von  $r$ ), unterscheiden sich die Fälle für  $c_1$  nur wenig. Man wird also fast das gleiche Ergebnis erhalten, wenn man mit

$$c_1 = F(r) \text{ und } k = 1$$

oder

$$c_1 = \Sigma(r) \text{ und } k = \text{konst. } (\sim 2,3 \text{ für einen HTR-Leistungsreaktor})$$

rechnet.

Es ist jedoch physikalisch sinnvoll  $c_1 = F$  zu wählen, da die Summe aus

durch Regelung vernichteter Neutronenmenge und der vom

Stationären abweichende Neutronenproduktion (die mit dem Spaltquerschnitt verbunden ist)

gering sein soll.

Die Betrachtung von  $c_2$  ist einfacher:

$N(r)$  ist zwar das Ziel, jedoch ist es sehr sinnvoll, die momentane Regelung mit dem momentanen und nicht mit dem Sollfluß zu messen. Außerdem ist der Term  $u \cdot \phi$  direkt in der Diffusionsgleichung enthalten. Wie man in der folgenden Herleitung leicht sieht, vereinfacht sich das Problem durch die Wahl von  $c_2 = \phi$ .

Damit entsteht insgesamt das Funktional

$$(4.2) \quad J = \int_0^T \int_V \left[ F^2 (\phi - N)^2 + k^2 \phi^2 u^2 \right] dV dt .$$

Wir erhalten als Hamiltonfunktion [114, 169]

$$H = - F^2 (\phi - N)^2 - k^2 \phi^2 u^2 . \quad +)$$

Durch die Einführung von orts- und zeitabhängigen Lagrange'schen Multiplikatorfunktionen

$$w_1(r, t), w_2(r, t) \text{ und } w_3(r, t)$$

berücksichtigen wir die Nebenbedingungen (3.1) und (3.2) (im Sinne der Kontrolltheorie).

Damit ergibt sich die erweiterte Hamiltonfunktion zu

---

+) in Verträglichkeit mit dem Maximumprinzip, da für  $J$  die Minimalforderung gilt.

$$\begin{aligned}
 (4.3) \quad H = & - F^2 (\phi - N)^2 - k^2 \phi^2 u^2 \\
 & + w_1 v \cdot \left[ D \Delta \phi + (v F - \Sigma - \sigma X - u) \phi \right] \\
 & + w_2 \cdot \left[ y_i F \phi - c_i I \right] \\
 & + w_3 \cdot \left[ y_x F \phi + c_i I - c_x X - \sigma X \phi \right] .
 \end{aligned}$$

Aus

$$\frac{\delta H}{\delta u} \cdot \delta u = 0$$

folgt

$$(4.4) \quad u_0 = - \frac{w_1 v \phi}{2 k^2 \phi^2} = - \frac{w_1 v}{2 k^2} \frac{1}{\phi} .$$

Damit wird

$$\begin{aligned}
 (4.5) \quad H_0 = H(u_0) = & - F^2 (\phi - N)^2 + \frac{w_1^2 v^2}{4 k^2} \\
 & + w_1 v \cdot \left[ D \Delta \phi + (v F - \Sigma - \sigma X) \phi \right] \\
 & + w_2 \cdot \left[ y_i F \phi - c_i I \right] \\
 & + w_3 \cdot \left[ y_x F \phi + c_i I - c_x X - \sigma X \phi \right] .
 \end{aligned}$$

Mit

$$\frac{\delta H_0}{\delta w_1} = \dot{\phi}$$

$$\frac{\delta H_0}{\delta w_2} = \dot{I}$$

$$\frac{\delta H_0}{\delta w_3} = \dot{X}$$



reproduzieren sich die Ausgangsgleichungen

$$(4.6) \quad \frac{1}{v} \dot{\phi} = D\Delta\phi + (vF - \Sigma - \sigma \cdot X)\phi + \frac{w_1 v}{2k^2}$$

$$\dot{I} = y_i F\phi - c_i I$$

$$\dot{X} = y_x F\phi + c_i I - c_x X - \sigma X \phi ,$$

und mit

$$\frac{\delta H_0}{\delta \phi} = - \dot{w}_1$$

$$\frac{\delta H_0}{\delta I} = - \dot{w}_2$$

$$\frac{\delta H_0}{\delta X} = - \dot{w}_3$$

ergeben sich für die Adjungierten  $w_1, w_2, w_3$  die kanonischen Gleichungen

$$-\dot{w}_1 = -2F^2(\phi - N) + \frac{\partial}{\partial \phi} (w_1 v D\Delta\phi) + w_1 v (vF - \Sigma - \sigma \cdot X)$$

$$+ y_i F w_2 + y_x F w_3 - w_3 \sigma X$$

$$-\dot{w}_2 = -c_i w_2 + c_i w_3$$

$$-\dot{w}_3 = -w_1 v \phi \sigma - c_x w_3 - \sigma \phi w_3$$

Unter Verwendung der Greenschen Formel und mit den folgenden Abkürzungen

$$(4.7) \quad K = \frac{1}{D} \frac{1}{2k^2}$$

$$A = \frac{1}{D} (\nu F - \Sigma - \sigma \cdot X)$$

$$\psi = -w_1 \nu$$

$$C = \frac{-1}{D} (2F^2 N + w_2 y_i F + w_3 y_x F - w_3 \sigma \cdot X)$$

$$P = \frac{1}{D} 2F^2$$

und anschließend durchgeführtem Grenzübergang  $\nu \rightarrow \infty$ , wobei mit  $\phi$  auch ihre Adjungierte  $\dot{\psi}$  verschwindet, erhält man das Gesamtsystem

$$0 = \Delta \phi + A \phi - K \psi$$

$$0 = \Delta \psi + A \psi + p \phi + C$$

$$(4.8) \quad \begin{aligned} \dot{I} &= y_i F \phi - c_i I \\ \dot{X} &= y_x F \phi + c_i I - c_x X - \sigma X \phi \end{aligned}$$

$$\dot{w}_2 = c_i w_2 - c_i w_3$$

$$\dot{w}_3 = -\sigma \phi \psi + c_x w_3 + \sigma w_3 \phi .$$

Zu den schon vorhandenen Anfangs- und Endwerten (3.3) und (3.4)

$$\phi(\mathcal{R}, t) = 0 \quad \forall t$$

$$(4.9) \quad I(r, 0) = I_0(r)$$

$$X(r, 0) = X_0(r)$$

kommen noch die "natürlichen" Rand- und Endbedingungen für die Adjungierten

$$(4.10) \quad \psi(\mathcal{R}, t) = 0 \quad \forall t$$

und

$$(4.11) \quad w_2(r, T) = 0$$

$$w_3(r, T) = 0$$

Wenn das System (4.8) (4.9) (4.10) (4.11) gelöst ist, ergibt sich die optimale Regelung  $u_{\text{opt}}$  aus (4.4) zu

$$(4.12) \quad u_{\text{opt}}(r,t) = K \frac{\psi}{\phi} D.$$

Zwei Anmerkungen sind noch anzufügen:

1) die Anfangswerte für  $\phi(r,t)$  und  $\psi(r,t)$  sind so zu wählen, daß

$$u = K \frac{\psi}{\phi} D$$

nicht singulär wird.

Dies gilt auch für die Diskretisierung von  $\phi$  und  $\psi$ .

2) Die Adjungierten  $\psi, w_2$  und  $w_3$  können formal als Importancefunktionen im Sinne von LEWINS [83] erklärt werden.

Dann ist

$$\begin{aligned} \psi &\geq 0 \\ w_2 &\geq 0 \\ w_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

### § 5 Bestimmung des Optimums

Im Gleichungssystem (4.8) erkennt man sofort, daß die partiellen Differentialgleichungen

$$(5.1) \quad \begin{aligned} 0 &= \Delta \phi + A\phi - K\psi \\ 0 &= \Delta \psi + A\psi + p\phi + C \end{aligned}$$

zeitlich entkoppelt sind und daß die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$(5.2) \quad \begin{aligned} \dot{I} &= y_i F\phi - c_i I \\ \dot{X} &= y_x F\phi + c_i I - c_x X - \sigma X\phi \end{aligned}$$

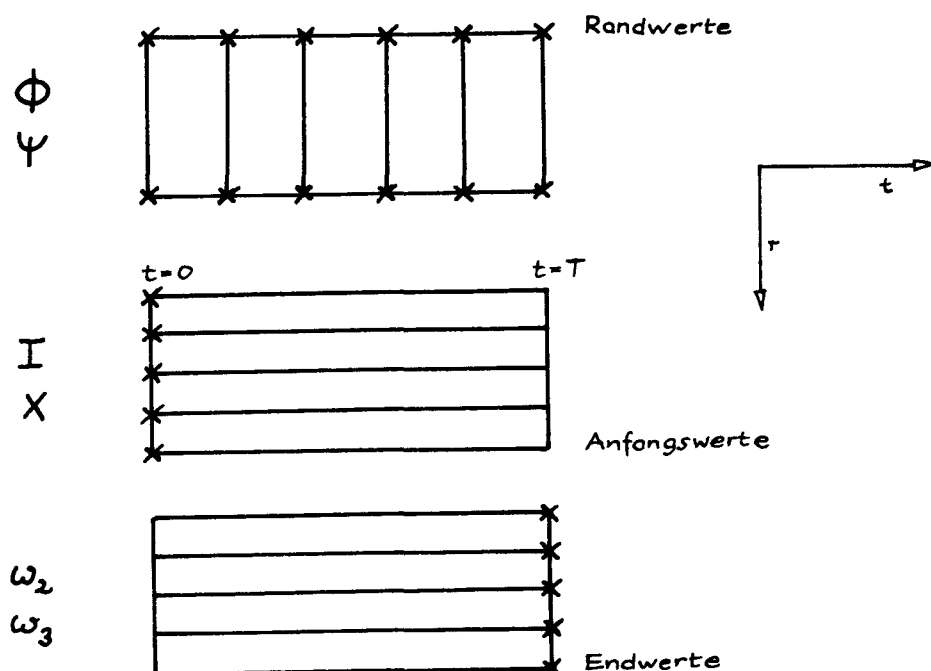
und

$$(5.3) \quad \begin{aligned} \dot{w}_2 &= c_i w_2 - c_i w_3 \\ \dot{w}_3 &= -\sigma \phi \psi + c_x w_3 + \sigma w_3 \phi \end{aligned}$$

keine räumliche Kopplung enthalten.

Beides vereinfacht die numerische Behandlung.

In graphischer Symbolik ergibt sich das folgende Bild





Neben dem Vorteil, im Funktional (4.2) einen dimensionslosen Vergleichsfaktor zu haben, hat das System (5.1) (5.2) (5.3) noch den weiteren Vorteil, daß (5.1) in  $\phi$  und  $\psi$  linear ist. Das verringert z.B. die Rechenzeit gegenüber dem in [54] ausführlich beschriebenen Verfahren um einen Faktor bis zu 10.

Das System (5.2) lautet in Matrixschreibweise

$$\dot{Z} = MZ + B$$

mit

$$Z = \begin{pmatrix} I \\ X \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} -c_i & 0 \\ +c_i & -c_x - \sigma\phi \end{pmatrix}$$

und

$$B = \begin{pmatrix} y_i F\phi \\ y_x F\phi \end{pmatrix}.$$

Eigenwerte von M (für jeden Ortspunkt) sind gemäß  $MZ + \lambda Z = 0$

$$\lambda_1 = c_i > 0$$

und

$$\lambda_2 = c_x + \sigma\phi > 0.$$

Damit ist (5.2) mit zunehmender Zeit und expliziter Diskretisierung numerisch stabil.

Das Gleichungssystem (5.3) lautet analog

$$\dot{\tilde{Z}} = \tilde{M}\tilde{Z} + \tilde{B}$$

mit

$$\dot{\tilde{Z}} = \begin{pmatrix} w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} c_i & -c_i \\ 0 & c_x + \sigma\phi \end{pmatrix}$$

und

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sigma\phi\psi \end{pmatrix} .$$

Die Eigenwerte dieser Systemmatrix sind

$$\tilde{\lambda}_1 = -c_i < 0$$

und

$$\tilde{\lambda}_2 = -(c_x + \sigma\phi) < 0 .$$

Nun sind aber für (5.3) Endwerte vorgegeben. Somit ist also das System (5.3) mit fallender Zeit und bei in dieser Richtung expliziter Diskretisierung numerisch stabil.

Für Diffusionsrechnungen sind zentrale Differenzenformeln üblich, also werden wir sie für (5.1) anwenden (auch für den adjungierten Fluß  $\psi$ ). Beschränken wir uns zur Illustration auf eine Ortsdimension, so ergeben sich die Diskretisierungsformeln

$$\Delta\phi_{jk} = \frac{\phi_{j+1,k} - 2\phi_{jk} + \phi_{j-1,k}}{(\Delta x)^2}$$

( $\psi$  analog)

$$\dot{I}_{jk} = \frac{I_{j,k+1} - I_{jk}}{\Delta t}$$

( $\dot{X}$  analog)

und

$$\dot{w}_{jk} = \frac{w_{jk} - w_{j,k-1}}{\Delta t}$$

(gilt für  $\dot{w}_2$  und  $\dot{w}_3$ ),

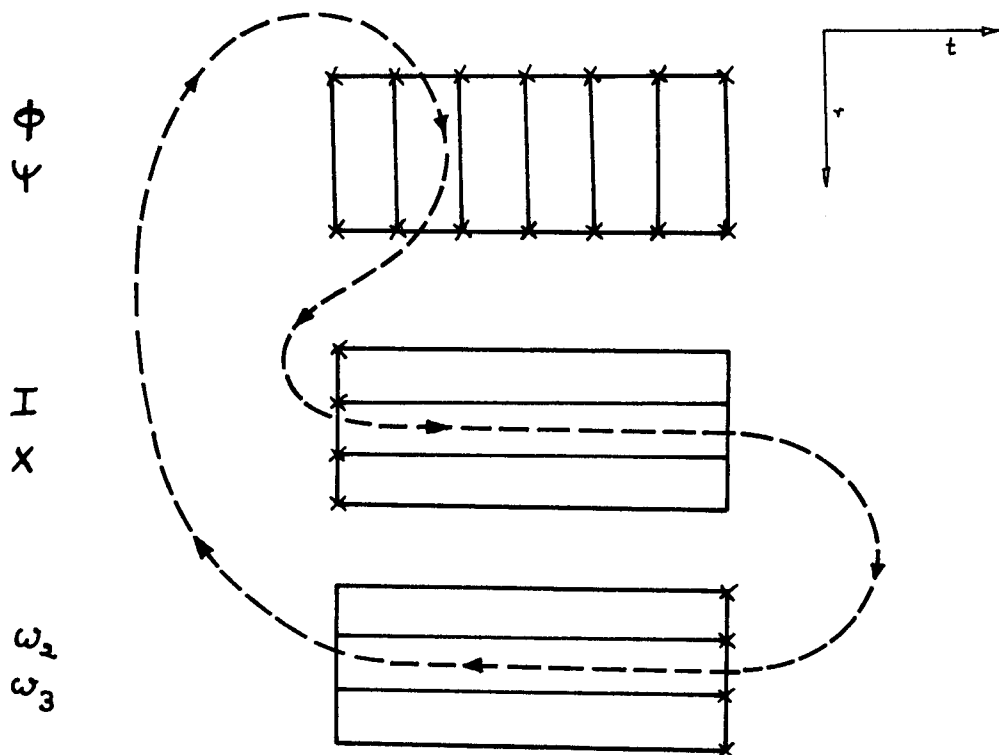
wobei

j der Laufindex des Ortes und

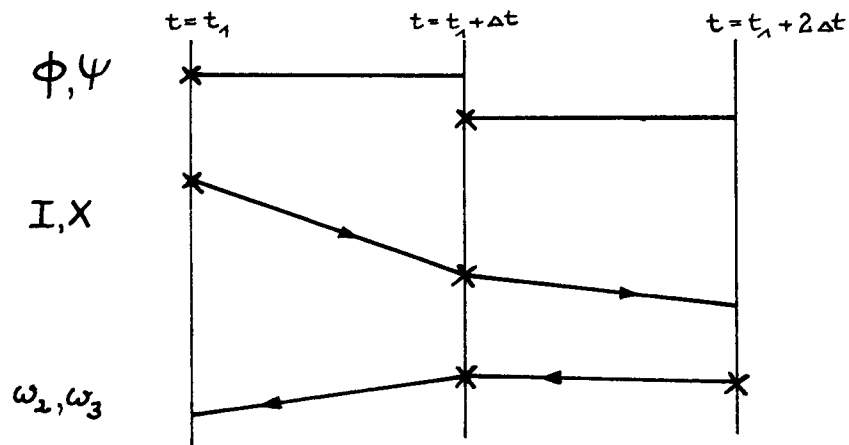
k der Laufindex der Zeit

ist.

Am zuvor gezeigten Schaubild läßt sich das Iterationsschema wie folgt darstellen.



Weiterhin wird angenommen, daß  $\phi$  und  $\psi$  für den Zeitraum  $\Delta t$  konstant sind [78,116], und  $I, X, w_2$  und  $w_3$  zwischen zwei Zeitpunkten linear interpoliert werden, also (zum besseren Verständnis in anderer Symbolik):



Damit ist das Gesamtverfahren ein ADI-Verfahren in Blockstruktur [160,161].

Die Startwerte dieser Iteration sind

$$\phi^0(r, t) = N(r) \quad \text{für alle } t.$$

Damit ergibt sich nach (3.2) ein  $I^0(r, t)$ - und  $X^0(r, t)$ -Verlauf.  $X^0(r, t)$  in (3.6) eingesetzt, ergibt

$$u^0 N = D \Delta N + (vF - \Sigma - \sigma X^0) N.$$

Nach (4.12) ist dann

$$u^0 N = K \psi^0.$$

Also erhält man als Startfunktion  $\psi^0(r, t)$

$$\psi^0(r, t) = \frac{1}{K} D \Delta N + \frac{1}{K} (vF - \Sigma - \sigma \cdot X^0) N.$$

Damit sind  $w_2^0$  und  $w_3^0$  aus (5.3) berechenbar.

Von nun an sind alle zur Iteration benötigten Größen bekannt.

Das System (4.8) besitzt gegenüber dem in [54] beschriebenen Verfahren den Vorteil, daß konventionelle Diffusionsprogramme verwendet werden können.

## § 6 Einige Eigenschaften des Verfahrens

Mit dem Funktional aus § 4 werden Reaktionsraten verglichen. Es werden die durch Spaltung erzeugten Neutronen, die vom Stationären abweichen, quadratisch (d.h. positiv definit) gemessen und mit den durch Regelung absorbierten (ebenfalls quadratisch gemessen) verglichen.

Der normale Vergleichsfaktor ist also  $k = 1$ .

Bei den numerischen Berechnungen für das Verfahren aus § 5 war der Durchschnitt aller Konvergenzintervalle das Intervall  $0 \leq k \leq 5,6$ . Das Verfahren konvergiert daher mindestens bis zu einer Gewichtsverschiebung um das 5,6-fache nach beiden Seiten des normalen Vergleichsfaktors.

Im ganzen Konvergenzbereich wird beim optimalen Verhalten der stationäre Zustand schnell erreicht.

Das bedeutet:

Eine dem Kontrollproblem (4.7) - (4.11) inhärente Eigenschaft ist, daß der stationäre Zustand auch eine gute Näherung des Optimums darstellt.

Dadurch erfüllt das Kriterium (4.2) weitere Zwecke:

- 1) Die optimale Regelung der Xenonschwingung wird die auslegungstechnische Optimierung nicht beeinflussen. Das bedeutet: Ein Reaktor soll eine mittlere Leistung  $N_m$  abgeben. Seine Auslegung muß jedoch so erfolgen, daß Sicherheit auch noch bei einer lokalen Spitzenlast  $N_s$  besteht. Technologisch ist es erstrebenswert  $\frac{N_s}{N_m}$  möglichst klein zu halten.

Aber gerade hierzu steht eine Regelung nicht im Widerspruch, die schnell den stationären Fluß anstrebt.

Das hier gewünschte Optimum wird also auch in der Nähe des auslegungstechnischen Optimums liegen.

(Eine Abwägung dieser beiden Optimierungen ist also nicht nötig. Sie würde auch weit vom Ziel dieser Arbeit liegen).

- 2) Die Linearität in  $\phi$  und  $\psi$  der Gleichung (5.1) ist eine Folge der speziellen Wahl des Kriteriums. Es ist schon erwähnt worden, daß dies eine Verkürzung der Rechenzeit um einen mittleren Faktor  $> 5$  bewirkt.
- 3) Wenn bei integralem Kriterium sich das schnelle Erreichen des stationären Zustandes ergibt, wenn also der **stationäre Zustand** schnell bei vertretbarem Regelaufwand erreicht wird (weil ja die Regelung vom Funktional erfaßt wird), dann wird auch ein Kriterium, welches in minimaler Zeit den stationären Zustand fordert, einen vertretbaren Regelaufwand liefern.
- Damit ist aber der systematische Nachteil der Endwertregelung <sup>x)</sup>, daß nämlich gewisse Parameter im zeitlichen Verlauf zu große Schwankungen erreichen, nicht vorhanden.

Zu weiteren sich daraus ergebenden Vorteilen siehe § 11.

Zum Schluß sei noch erwähnt, daß die Forderung der konstanten Leistung

$$\int_V F \phi dV = L = \text{const}$$

in diesem Verfahren nicht explizit enthalten ist.

Sie ist aber näherungsweise enthalten, was die folgende Überlegung klarmacht:

Das Erreichen des stationären Zustandes ist das Optimum.  
Im stationären Falle aber ist die Leistung normiert.

Praktische Rechnungen ergaben eine Abweichung von max. 1,4 %. Das bedeutet: das für Xenonüberlegungen übliche Modell mit Leistungsnormierung wurde ersetzt durch ein Optimierungsmodell (bei bzgl. der Leistungsnorm minimalem und vertretbarem Fehler).

Das gegebene Gleichungssystem ist jedoch bzgl. der Leistungsnormierung nicht konsistent, denn  $X(r,t)$  aus (3.2) berechnet und in (3.1) eingesetzt, ergibt

$$0 = D\Delta\phi + \left[ \nu F - \sum -\sigma X(\phi) \right] \phi.$$

---

x) siehe Kapitel III



Diese Gleichung ist nicht homogen in  $\phi$ , also auch nicht normierbar. Zwar ist  $X$  nur schwach von  $\phi$  abhängig, was immer zur Motivierung der dennoch durchgeführten Normierung verwendet wird, eine strenge Homogenität würde jedoch die Diffusionsgleichung vom Jod- und Xenonsystem entkoppeln, und dann träten überhaupt keine Schwingungen auf.

### § 7 Eindeutigkeit und Konvergenz

Wir setzen die Existenz einer Lösung von (5.1) (5.2) (5.3) und den gegebenen Anfangs-, End- und Randwerten voraus und beschäftigen uns mit der Eindeutigkeit.

Es bestehen 3 Einzelprobleme:

- die Eindeutigkeit von (5.1) ,
- die Eindeutigkeit von (5.2) und (5.3)
- und die Eindeutigkeit der Gesamtiteration.

(5.2) und (5.3) sind gewöhnliche Anfangswertaufgaben, die numerisch stabil sind. Die Eindeutigkeit ihrer Lösung ist unter geringen Voraussetzungen, die physikalisch keine relevanten Einschränkungen sind, zu zeigen.

Die Eindeutigkeit von (5.1) ergibt sich wie folgt:

Seien  $\phi_1, \psi_1$  und  $\phi_2, \psi_2$  zwei verschiedene Lösungen von (5.1) d.h.

$$0 = \Delta\phi_1 + A\phi_1 - K\psi_1$$

$$0 = \Delta\phi_2 + A\phi_2 - K\psi_2$$

und

$$0 = \Delta\psi_1 + A\psi_1 + p\phi_1 + C$$

$$0 = \Delta\psi_2 + A\psi_2 + p\phi_2 + C,$$

so folgt durch Differenzbildung

$$(7.1) \quad 0 = \Delta\varphi + A\varphi - K\psi$$

$$(7.2) \quad 0 = \Delta\psi + A\psi + p\varphi$$

mit

$$\varphi = \phi_1 - \phi_2$$

und

$$\psi = \psi_1 - \psi_2 .$$

Multiplikation von (7.1) mit  $\psi$ , von (7.2) mit  $\varphi$  und Subtraktion führt zu

$$0 = \psi \Delta \varphi - \varphi \Delta \psi - K \psi^2 - p \varphi^2 .$$

Integration über das Reaktorvolumen schließlich ergibt

$$\begin{aligned} \int_V (K \psi^2 + p \varphi^2) dV &= \int_V (\psi \Delta \varphi - \varphi \Delta \psi) dV \\ &= \int_{\mathcal{R}} (\psi \operatorname{grad} \varphi - \varphi \operatorname{grad} \psi) d\sigma = 0 \end{aligned}$$

nach der Green'schen Formel und unter Verwendung von

$$\varphi(\mathcal{R}, t) = 0 ,$$

$$\psi(\mathcal{R}, t) = 0 ,$$

$$\text{da } \phi_1(\mathcal{R}, t) = \phi_2(\mathcal{R}, t) = \psi_1(\mathcal{R}, t) = \psi_2(\mathcal{R}, t) = 0 .$$

Also

$$\int_V (p \varphi^2 + K \psi^2) dV = 0 .$$

Wegen  $K > 0$  und  $p > 0$  folgt daraus  $\varphi \equiv 0$  und  $\psi \equiv 0$  d.h.

$$\phi_1 \equiv \phi_2 \text{ und } \psi_1 \equiv \psi_2 .$$

Die Zusammensetzung der beiden Iterationen schließlich bringt keine Mehrdeutigkeit, d.h., es gibt höchstens eine Lösung.

Somit ist alles bewiesen.

Eine theoretische Aussage über den Konvergenzbereich ist nicht gelungen.

Die durch Rechnungen festgestellte Konvergenz für

$$0 \leq k \leq 5,6$$

ist jedoch im Sinne einer Negativaussage zu verstehen: in unseren Parameterstudien ist im obigen Bereich keine Divergenz aufgetreten. Häufig war jedoch der Konvergenzbereich größer.

## § 8 Ergebnisse

Die bis jetzt gewonnenen Ergebnisse sollen nun an Beispielen erläutert werden. Wir wählen dazu einen eindimensionalen Reaktor vom HTR-Typ.

Für den stationären Fluß <sup>x)</sup> wurde als lokales Maximum

$$\phi_{\max} = 2 \cdot 10^{14} \frac{n}{\text{cm sec}}$$

gewählt. Variiert wurde bzgl. der Flußform, die Flußflachheit ("flatness"). Ausgehend vom sinusförmigen Fluß (Abb. 1) wurde die Form unter Beibehaltung des lokalen Maximums immer mehr abgeflacht (Abb. 2-5) nach den Formeln

$$\begin{aligned} N_1 &= 2 \cdot 10^{14} \sin \frac{\pi x}{H} \\ \left. \begin{aligned} N_2 &= \\ N_3 &= \\ N_4 &= \\ N_5 &= \end{aligned} \right\} 2 \cdot 10^{14} \left[ 1 - \left( \frac{2x}{H} - 1 \right)^{2n} \right] \end{aligned} \quad \begin{aligned} n=1 \\ n=2 \\ n=3 \\ n=4 \end{aligned}$$

In Abb. 7 und 8 sind zwei verwendete Spaltquerschnitte gezeichnet, zum einen

$$F = 0,0016 \frac{1}{\text{cm}}$$

und zum anderen eine Anreicherung am Reaktorrand

$$F = 0,0016 \left( 1 - 0,025 \sin^2 \frac{\pi x}{H} \right),$$

was i.a. zu flacheren Flußprofilen und zu größerer Instabilität führt.

Die Absorptionsquerschnitte, die bei konstantem F die Flüsse  $N_2$  bis  $N_5$  ergeben, sind aus den Abb. 9 bis 12 zu ersehen.

Bei angereichertem Spaltmaterial ergeben sich Absorptionsquerschnitte

x) Zur Problematik der Flußvorgabe siehe [54] .

nach Abb. 6.

Als rechentechnische Parameter wurden schließlich gewählt

$$\Delta x = 20 \text{ cm}$$

$$\Delta t = 1 \text{ Std.}$$

$$T = 50 \text{ Std.}$$

Alle weiteren Parameter sind wie in § 18 gewählt.

Bei den anschließenden 3D-Bildern ist nur der besseren Übersicht wegen die Abweichung vom stationären Verlauf gezeichnet. Der Sockel der Bilder ist das erreichte Minimum der Funktionswerte. Das Erreichen ist dann als Ebene in Sockelhöhe zu erkennen.

Zur Kenntnis der absoluten Größen ist die Sockelgrundlinie quantitativ angegeben, jedoch nicht an der Stelle, wo die Funktion den Sockel berührt.

Ausgehend vom stationären Fluß nach Abb. 2 (mit konstanten Spalt- und einem Absorptionsquerschnitt nach Abb. 9) geben die Abbildungen 13, 14 und 15 das freie Verhalten von Jod, Xenon und vom Fluß wieder. Der abgeflachtere Fluß aus Abb. 4 zeigt ungeregelt ein ähnliches Verhalten (Abb. 16). Den Jod- und Xenonverlauf dazu zeigen die Abb. 17 und 18.

Um zu demonstrieren, daß die Ergebnisse des Verfahrens aus [54] sich nur wenig ändern gegenüber dem aus § 5, zeigen die Abb. 19-22 die Ergebnisse einer Optimierung nach [54] mit  $k^2 = 10^{-33} \frac{1}{\text{cm}^2 \text{sec}^2}$ ,

wobei in Abb. 21 der Fluß, in Abb. 19 und 20 die Jod- und Xenonkonzentration und in Abb. 22 die optimale Regelung gezeigt sind.

Aus der Vielfalt gerechneter Fälle (nach dem Verfahren aus § 4) sind 2 ausgewählt worden.

Die erste Gruppe zeigt die Regelung bei einem mit Spaltstoff nach außen hin angereicherten Plattenreaktor (Abb. 8) für  $k = 1$ .

Die Abb. 23 und 24 zeigen den Jod- und Xenonverlauf, Abb. 25 den Fluß und Abb. 26 die optimale Regelabsorption.

Die nächste Gruppe zeigt ein Bild größter Regelüberbewertung. Es ist  $k = 5,6$ . Trotzdem zeigen die  $I$ - (Abb. 27)  $X$ - (Abb. 28) und  $\phi$ -Verläufe (Abb. 29) ein schnelles Erreichen des stationären Zustandes.

Die optimale Regelung (Abb. 30) erreicht entsprechend schnell den Ausgangszustand des stationären Falles.



## B Räumlich diskrete Regelung (Simulation von Regelstäben)

### § 9 Räumlich gewichtete Regelung

Wird in einem Teilgebiet des Reaktors ein größeres  $k$  angenommen, so wird die dort vorhandene Regelung stärker zum Funktional beitragen. Damit wird sich eine kleinere Regelung als Optimum einstellen.

Das Prinzip dieser Methode ist nun, durch eine Folge von Gewichtsfunktionen, die in Nichtregelgebieten immer größer werden, in diesen Gebieten die Regelung zu verkleinern, bis im Grenzübergang dort keine Regelung mehr vorhanden ist [53].

Bei zunehmenden Werten von  $k$  in Gebieten, in denen nicht geregelt werden soll, wird zwar der Konvergenzbereich des Verfahrens verlassen, jedoch ist anzunehmen, daß eine Näherungslösung dann vorliegt, wenn sich die Regelung in den Gebieten, in denen geregelt werden soll, durch den Grenzübergang nur unwesentlich ändert.

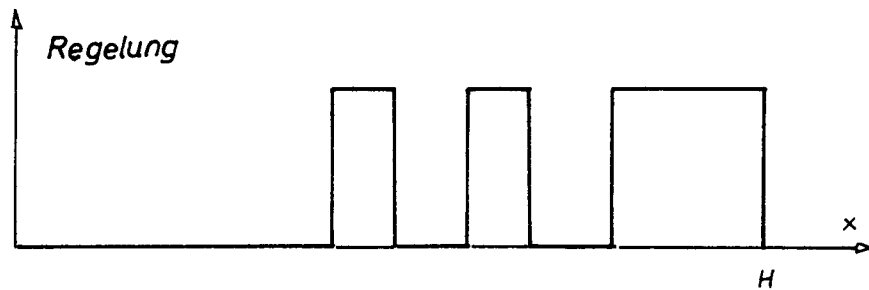
Die Konvergenz des Verfahrens wird jedoch in dem Maße schlechter, in dem die Gebiete, in denen geregelt werden soll, kleiner werden. Damit scheidet dieses Verfahren praktisch für eine Simulation weniger, realer Stäbe aus.

Es ist jedoch durchaus für Berechnungen zu verwenden, die erste Anhaltspunkte über Regelungsverhalten und Regelbarkeit geben sollen. Außerdem ist es zu verwenden für Fälle, in denen ein größerer Bereich durch dichte Stabanordnung fast kontinuierlich geregelt werden kann.

In Abb. 32 und 31 werden die optimale Regelung und der sich ergebende optimale Fluß wiedergegeben bei einer Treppenfunktion von  $k$ , die nur in einer Reaktorhälfte eine Regelungsmöglichkeit approximiert.

Vergrößert man im "regelungsfreien" Teil  $k^2$  um den Faktor 10, so ergeben sich die Abb. 33 und 34. Man erkennt zwischen den Abb. 31 und 33 und zwischen 32 und 34 nur schwache Unterschiede. Außerdem ist in Abb. 34  $u$  im "regelungsfreien" Teil verschwindend klein gegenüber  $u$  im geregelten Gebiet. D.h.  $u$  ist im "regelungsfreien" Teil mit guter Näherung Null.

Die Abb. 35 und 36 ergeben den optimalen Fluß und die optimale Regelung bei einer Verteilung mit 2 Stabgebieten und einem größeren Regelbereich.



Die 3 Regelbereiche kann man in den Abb. 36 und 38, die die Regelung von verschiedenen Perspektiven (wie auch Abb. 35 und 37) zeigen, deutlich erkennen.

Man sieht aber auch einen Nachteil des Verfahrens, daß nämlich der Stab in sich keinen festen Absorptionsverlauf hat.

Dieses Modell wurde deshalb nicht weiter verfolgt.

### § 10 Räumlich begrenzte Regelung

Hier geben wir die örtliche Regelverteilung  $h(x) = \sum_i h_i(x)$  vor.  
Zur Vereinfachung nehmen wir nur ein Regelgebiet (einen Stab)  $h(x)$  an und zwar mit dem Ansatz

$$(10.1) \quad u = h(x) \cdot a(t) \quad \text{mit festem } h(x).$$

Gesucht ist also das zeitliche Verhalten der Amplitude  $a(t)$  des gegebenen Stabes  $h(x)$ . Mit diesen Voraussetzungen wird die zum Funktional (3.7) gehörende Hamiltonfunktion

$$\begin{aligned} H = & - (\phi - N)^2 - k^2 h^2 a^2 \\ & + w_1 v \cdot \left[ D\Delta\phi + (vF - \Sigma - \sigma X)\phi - h \cdot a \cdot \phi \right] \\ & + w_2 \cdot \left[ y_i F\phi - c_i I \right] \\ & + w_3 \cdot \left[ y_x F\phi + c_i I - c_x X - \sigma X\phi \right]. \end{aligned}$$

Aus

$$\int_0^T \int_V \frac{\delta H}{\delta u} \delta u \, dV dt = 0$$

folgt

$$\int_V \frac{\delta H}{\delta a} \delta a \, dV = 0,$$

also

$$(10.2) \quad a_{\text{opt}}(t) = \frac{-\int_V w_1(r,t) \phi(r,t) h(x) dV}{2 \int_V k^2 h^2 dV}.$$

Mit

$$\tilde{H} = 2 \int_V k^2 h^2 dV$$

wird  $H_0$

$$\begin{aligned}
 H_0 = & -(\phi - N)^2 - \frac{h^2 k^2}{\tilde{H}^2} \cdot \left[ \int_V v w_1 \phi h dV \right]^2 - v w_1 \cdot \frac{1}{\tilde{H}} \cdot \int_V v w_1 \phi h dV \\
 & + w_1 v \cdot \left[ D \Delta \phi + (v F - \Sigma - \sigma X) \phi \right] \\
 & + w_2 \cdot \left[ y_i F \phi - c_i I \right] \\
 & + w_3 \cdot \left[ y_x F \phi + c_i I - c_x X - \sigma X \phi \right] .
 \end{aligned}$$

Man erkennt leicht, daß sich die Gleichungen für  $I, X, w_2$  und  $w_3$  reproduzieren.

Mit wenig Rechenaufwand erhält man die folgenden Gleichungen für  $\phi$  und  $\psi$

$$\begin{aligned}
 (10.3) \quad 0 = & D \Delta \phi + (v F - \Sigma - \sigma X) \phi - \frac{h}{\tilde{H}} \phi \cdot \int_V \psi \phi h dV \\
 0 = & D \Delta \psi + (v F - \Sigma - \sigma X) \psi - \frac{h}{\tilde{H}} \psi \cdot \int_V \psi \phi h dV \\
 & + 2\phi + C(r, t)
 \end{aligned}$$

mit

$$C(r, t) = -2N - w_2 y_i F - w_3 y_x F + \sigma \cdot X w_3 .$$

Nach Lösung des Gesamtsystems ergibt sich die optimale Regelung nach (10.1).

Im Anhang wird ein entsprechendes Gleichungssystem für  $M$  Regelstäbe mittels der Variationsrechnung entwickelt.

Die numerische Lösung dieses Gleichungssystems dürfte nach dem derzeitigen Stand nicht möglich sein, wenn man den Lösungsaufwand mit dem des einfachen Systems (5.1) (5.2) (5.3) vergleicht.

Es enthält neben der räumlichen Kopplung mit den Nachbarpunkten durch die Diffusion auch noch die Kopplung mit den übrigen Punkten durch

das Ortsintegral

$$\int_V \phi \psi h dV .$$

Weiter kommt hinzu, daß (wie im Anhang ersichtlich) für jeden Stab ein solcher Integralterm existiert.

Dieses Modell wurde deshalb nicht weiter verfolgt.

### III Kontrollproblem mit Endwertregelung

#### A Methodik

#### § 11 Motivierung der Endwertregelung

Das Ergebnis von Kapitel II ist, daß die beste Möglichkeit, Schwingungen zu verhindern und zu beseitigen, nicht etwa darin besteht, lokal durch Flußüberhöhung das Xenon wegzubrennen, sondern darin, im wesentlichen ohne Überschwung den Fluß in den stationären Zustand zu bringen. Damit paßt sich auch das Xenon dem stationären optimal an.

Das schnelle Erreichen des stationären Zustandes ist also eine gute Näherung des Optimums.

Als weiteres Ergebnis kann man aussagen, daß Regelstäbe mit numerisch vertretbarem Aufwand nicht oder nur eingeschränkt verwirklicht werden können.

Beide Ziele werden erreicht, wenn man als Funktional einen Endwertzustand nimmt.

Gesucht ist  $u(r,t)$  mit  $u(r,t) \leq U(r)$  bei vorgegebenem  $U(r)$ , so daß

$$\begin{aligned} (11.1) \quad I(r,T) &= I^*(r) \\ X(r,T) &= X^*(r) \\ \phi(r,T) &= \phi^*(r) = N(r) \end{aligned}$$

mit minimalem  $T$ .

Die Endwertregelung besitzt folgende Vorteile:

- 1) Die Darstellung von Regelstäben ist möglich, und somit kann eine optimale Regelstabstrategie gesucht werden.
- 2) Die Beschränktheit der Regelung  $u \leq U$  ist praxisnah. Eine solche Bedingung ist bei integraler Zielfunktion nur mit großem Aufwand zu realisieren.

- 3) Bei der mathematischen Durchführung entsteht eine Diffusionsgleichung, die so beschaffen ist, daß auf Programme zurückgegriffen werden kann, die durch lange Entwicklung auf maximale Schnelligkeit und optimale Anpassung an reaktorphysikalische Bedürfnisse ausgerichtet sind.

Da der Fluß den Bewegungen der Stäbe prompt folgt, dies aber im zeitlichen Xenonmaßstab Sprünge sind, kann man die Forderung

$$\phi = \phi^*$$

in (11.1) fallenlassen, denn wenn durch eine gewisse Stabkonfiguration die Jod- und Xenonkonzentration ihre stationären Verläufe erreicht haben, wird nach dem Herausziehen der Stäbe der Fluß prompt den stationären Wert annehmen.

Damit ist dann (11.1) erfüllt.

Die Bedingung

$$(11.2) \quad \begin{aligned} I(r,T) &= I^*(r) \\ X(r,T) &= X^*(r) \end{aligned}$$

erfüllt also auch die Anforderungen, die an (11.1) gestellt wurden.

Weiter gibt es keine negative Absorption. Wir müssen also auch

$$0 \leq u(r,t)$$

voraussetzen.

Damit entsteht insgesamt das Problem:

Im Gleichungssystem

$$(11.3) \quad \begin{aligned} 0 &= D\Delta\phi + (vF - \Sigma - \sigma X)\phi - u\phi \\ \dot{I} &= y_i F\phi - c_i I \\ \dot{X} &= y_x F\phi + c_i I - c_x X - \sigma_X \phi \end{aligned}$$



ist u mit

$$0 \leq u(r,t) \leq U(r)$$

so zu bestimmen, daß

$$I(r,T) = I^*(r)$$

$$X(r,t) = X^*(r)$$

ist mit minimalem T; dabei sind die Randbedingungen

$$\phi(\partial, t) = 0$$

und die Anfangswerte

$$I(r,0) = I_0(r)$$

$$X(r,0) = X_0(r)$$

zu erfüllen.

Es soll noch darauf hingewiesen werden, daß im Kap. II die Normierung des Flusses nur annähernd erfüllt ist, hier aber durch die Form der Diffusionsgleichung eine Leistungsnormierung

$$\int_V F(r)\phi(r,t)dV = \text{const}$$

möglich ist.

Wir wollen noch die Regelbarkeit ebenso wie die Existenz einer Lösung voraussetzen.

Das zu (11.3) gehörige Hamiltonproblem lautet

$$\int_0^T \int_V 1 \, dV dt = V \cdot T = \text{Min} \quad .$$

Durch Einführen der Lagrangeschen Multiplikatorfunktionen  $w_1(r,t)$ ,  $w_2(r,t)$  und  $w_3(r,t)$  berücksichtigt man die Nebenbedingungen. Dann lautet die Hamiltonfunktion

$$H = -1 + w_1 \left[ D\Delta\phi + (\nu F - \Sigma - \sigma \cdot X)\phi - u\phi \right] \\ + w_2 \left[ y_i F\phi - c_i I \right] + w_3 \left[ y_x F\phi + c_i I - c_x X - \sigma \cdot X\phi \right] .$$

Es wird

$$\delta H = \frac{\delta H}{\delta u} \cdot \delta u = -w_1 \phi \delta u = 0.$$

Nun ist  $\phi \neq 0$ .

Ebenso ist  $w_1 \neq 0$ , denn falls  $w_1 \equiv 0$ , würde  $H$  nicht von  $u$  abhängen, im Widerspruch zur Regelbarkeit.

Also muß sein

$$\delta u = 0 ,$$

d.h.

$$u = u_0 = \text{const (stückweise)}.$$

Es ist also zu untersuchen

$$H_0(r, t) = -1 + w_1 \cdot \left[ D\Delta\phi + (\nu F - \Sigma - \sigma \cdot X)\phi - u_0\phi \right] \\ + w_2 \left[ y_i F\phi - c_i I \right] + w_3 \left[ y_x F\phi + c_i I - c_x X - \sigma \cdot X\phi \right] .$$

Der Minimalwert von  $H_0$  bzgl.  $u_0$  wird erreicht für

$$w_1 > 0 \text{ durch } u_0 = U$$

$$w_1 < 0 \text{ durch } u_0 = 0$$

und

$$w_1 = 0 \text{ durch } 0 \leq u_0 \leq U.$$

Die Punktmenge  $w_1 = 0$  kann vernachlässigt werden.

Damit erhalten wir

$$u_0 = 0 \quad \text{falls } w_1 < 0$$

$$u_0 = U \quad \text{falls } w_1 > 0 \quad .$$

Der Nulldurchgang von  $w_1$  zeigt also an, wann  $u$  von einem Extrem zum anderen springt.

Damit haben wir eine Regelung vom Bang-bang-Typ erhalten [46,157].

## § 12 Stabdarstellung

Gehen wir von  $M$  verschiedenen Stäben aus, so beträgt die Gesamt-  
**absorption**

$$(12.1) \quad u(r,t) = \sum_{j=1}^M u_j(r,t) .$$

Ausgehend von einer Vorstellung analog (10.1), daß nämlich jeder  
Stab eine örtlich vorgegebene Absorptionskurve besitzt, ist

$$(12.2) \quad u_j(r,t) = g_j \cdot f_j(r) \cdot a_j(t) \quad j = 1, \dots, M ,$$

wobei

$f_j(r)$  die normierte Absorptionskurve  
(im Idealfall die charakteristische Kurve des  
Stabes),

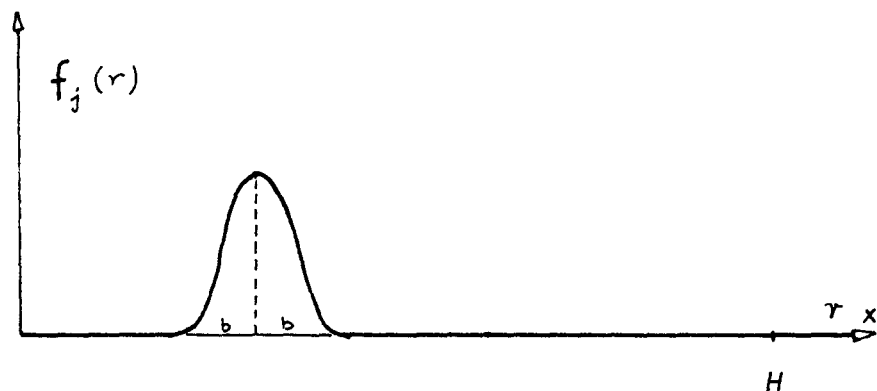
$g_j$  die Stärke des Stabes

sind und

$a_j(t)$  das Zeitverhalten des Stabes  $j$

beschreibt.

Um Unstetigkeiten in der Diffusionsgleichung durch die Stabdarstellung  
zu vermeiden, wurde die räumliche Verteilungskurve, die den Regel-  
stab darstellt, mit endlichen Gradienten versehen, nämlich



$$(12.3) \quad f_j(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x \leq x_j - b \\ c \left[ 1 + \cos \frac{\pi}{b} (x - x_j) \right] & \text{für } x_j - b \leq x \leq x_j + b \\ 0 & \text{für } x_j + b \leq x \leq 640 \end{cases} .$$

Dabei ist  $x_j$  die Position des Stabes  $j$  und  $b$  dessen mittlerer Durchmesser.

Mit  $c = \frac{1}{2}$  ist  $f_j(x)$  so normiert, daß

$$f_j(x_j) = 1 \quad (\text{Normierung des Maximums})$$

und mit  $c = \frac{1}{2b}$  ergibt sich

$$\int_0^H f_j(x) dx = 1 \quad (\text{integrale Normierung}) .$$

Um eine Vorstellung von  $a_j(t)$  zu bekommen, gehen wir aus von der "Schaltgleichung":

$$w_1(r, t) = 0 .$$

Sie stellt eine sich im Gebiet des Reaktorvolumens  $V$  bewegende Hyperfläche dar. Dies soll im zweidimensionalen Fall veranschaulicht werden. Hier ist also  $w_1 = 0$  zu jedem Zeitpunkt eine Kurve.

Sei

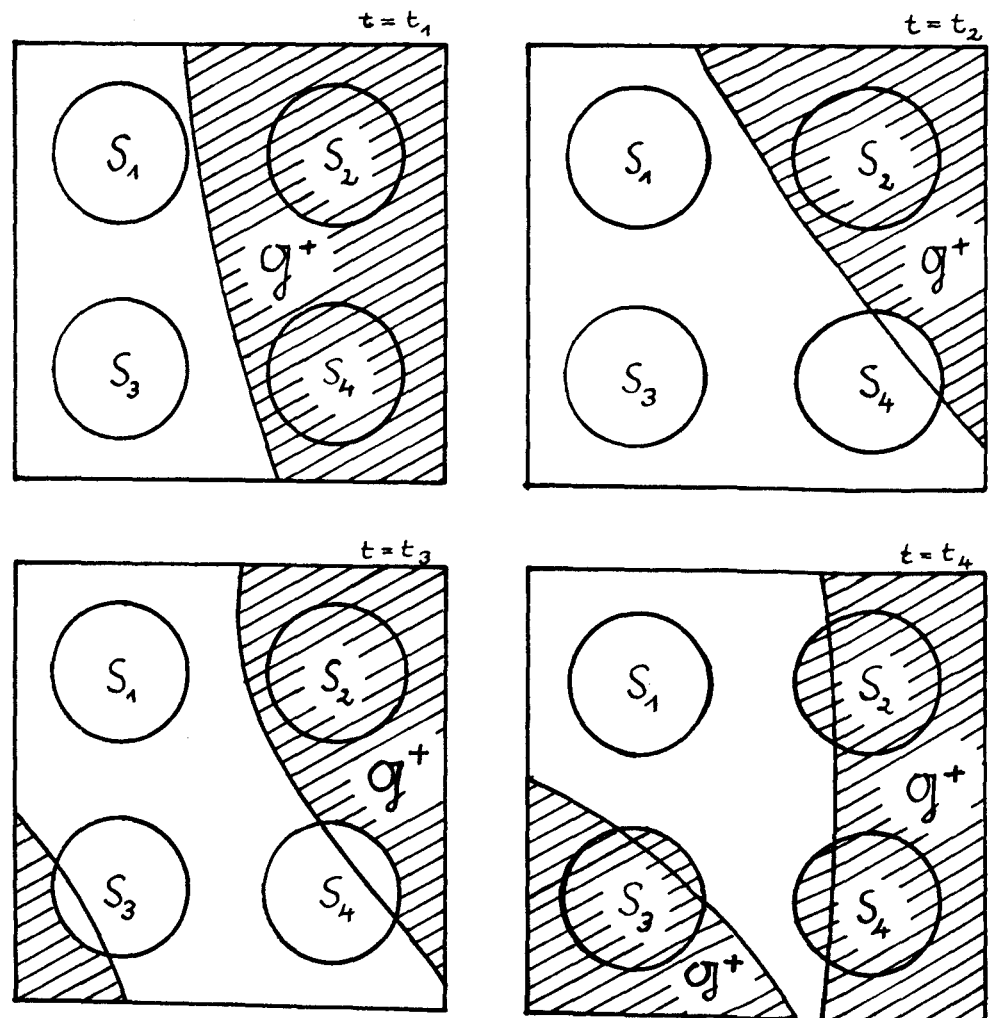
$$G^+(r, t) \text{ das Gebiet mit } w_1 \geq 0$$

$$G^-(r, t) \text{ das Gebiet mit } w_1 \leq 0,$$

seien weiter

$$S_j(r) \quad j = 1, \dots, M$$

die einzelnen Stabgebiete, so ergibt sich für einige Zeitpunkte  $t_k$  das folgende Bild:



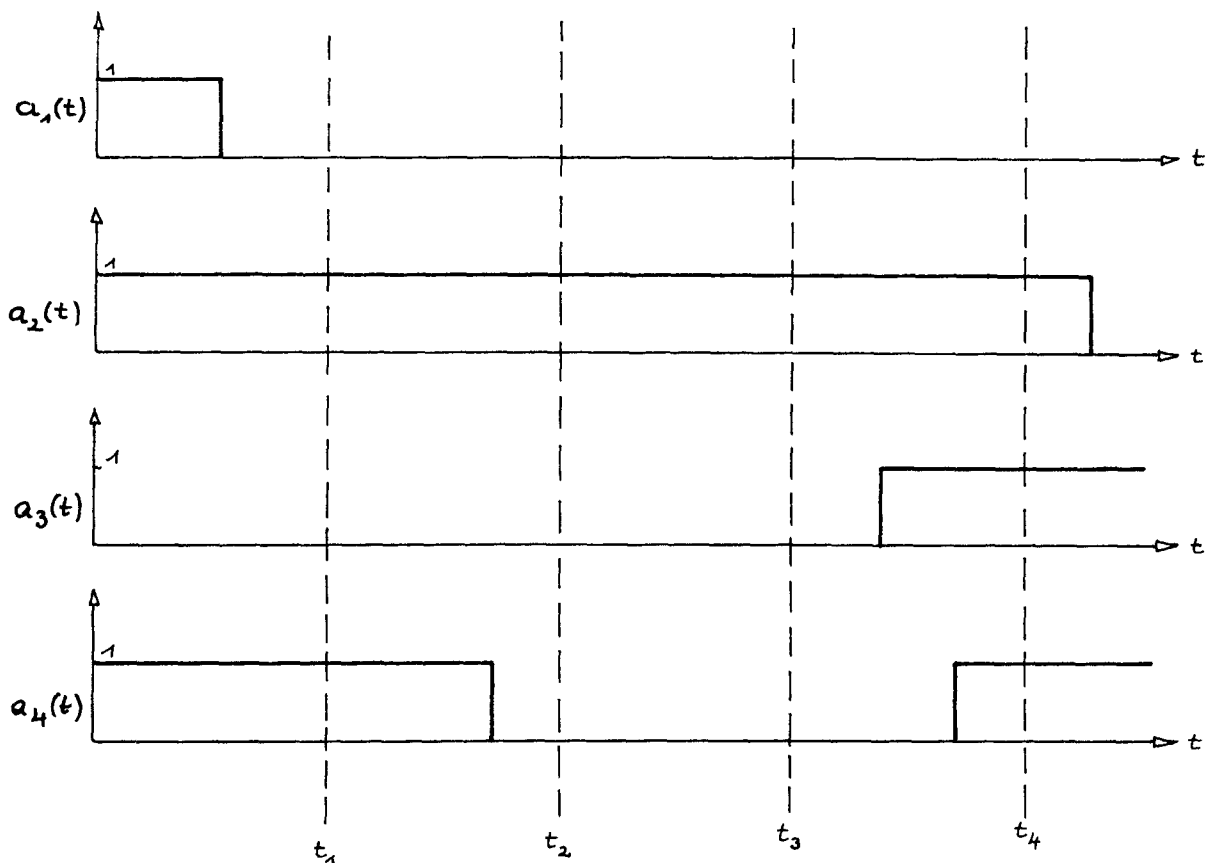
Für alle  $S_j \in \mathcal{Q}^+$  bedeutet das, der Stab ist eingefahren, und für alle  $S_j \in \mathcal{Q}^-$  der Stab ist ausgefahren.

Weiter ist in sinnvoller Auslegung der technischen Wirklichkeit zu fordern

$$u_j = \begin{cases} 0 & \text{falls } S_j \text{ überwiegt in } \mathcal{Q}^- \\ U_j & \text{falls } S_j \text{ überwiegt in } \mathcal{Q}^+ \end{cases}$$

(Beispiel des 2. Stabes im letzten Bild).

Damit ist der zeitliche Verlauf jedes einzelnen Stabes eine Mäanderkurve.



Das Problem des zeitlichen Verlaufs der Regelung ist also gelöst, wenn man für jeden Stab die Schaltzeitpunkte ermittelt hat.

### § 13 Anwendung der Störungstheorie

Die Ausgangsgleichungen sind

$$\begin{aligned} \frac{1}{v} \dot{\phi} &= D\Delta\phi + (vF - \Sigma - \sigma X)\phi - u\phi \\ (13.1) \quad \dot{I} &= y_i F\phi - c_i I \\ \dot{X} &= y_x F\phi + c_i I - c_x X - \sigma X\phi \end{aligned}$$

Im üblichen Störansatz

$$\begin{aligned} \phi(r,t) &= \phi^*(r) + \varphi(r,t) \\ (13.2) \quad I(r,t) &= I^*(r) + i(r,t) \\ X(r,t) &= X^*(r) + x(r,t) \\ u(r,t) &= u^*(r) + \tilde{u}(r,t) \end{aligned}$$

darf, weil die Ruhelage der Regelstäbe die Nullmarke darstellt, d.h.  $u^* = 0$  (siehe dazu [54]),  $\tilde{u}$  durch  $u$  ersetzt werden.

Einsetzen von (13.2) in (13.1), Herauskürzen der stationären Gleichungen und anschließender Linearisierung führt zu

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= vD\Delta\varphi + v(vF - \Sigma - \sigma X^*)\varphi - vx\phi^*\sigma \\ &\quad - vu^*\varphi - vu\phi^* \quad (da \quad u = \tilde{u}) \\ (13.3) \quad \frac{di}{dt} &= y_i F\varphi - c_i i \end{aligned}$$

$$\frac{dx}{dt} = y_x F\varphi + c_i i - \sigma x\phi^* - \sigma X^*\varphi - c_x x,$$

oder in Matrixschreibweise

$$(13.4) \quad \dot{Y}(r,t) = L(r) \cdot Y(r,t) - S(r,t)$$



mit

$$Y = \begin{pmatrix} \varphi \\ i \\ x \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} uv\phi^* \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$(13.5) \quad L = \begin{pmatrix} vD\Delta + v(vF - \Sigma - X^*) & 0 & -v\sigma\phi^* \\ y_i F & -c_i & 0 \\ y_x F - \sigma X^* & +c_i & -c_x - \sigma\phi^* \end{pmatrix}.$$

Berechnet man für  $L$  die Eigenwerte  $p$  und die Eigenfunktionen  $\psi$

$$L\psi_{jn}(r) = p_{jn} \psi_{jn}(r) \quad \begin{array}{l} j = 1, 2, 3 \\ n \in \mathbb{N} \end{array},$$

so stellen die  $\psi_{jn}$  die Kaplan-Moden dar [66].

Die Zahlen  $n$  entsprechen den Indices der räumlichen Kaplanmoden;

für  $j = 1$  erhält man den Eigenwert der prompten Flußänderung  
(der hier nicht interessiert und formal durch den  
Grenzübergang  $v \rightarrow \infty$  verschwindet).

und für

$j = 2, 3$  erhält man die dem Jod und Xenon zugeordneten (meist  
komplexen) Eigenwerte.

Bezeichnen wir die adjungierten Eigenfunktionen mit  $\tilde{\psi}$ , so gilt für  
sie [64]

$$(13.6) \quad L^T \tilde{\psi}_{jn}(r) = p_{jn} \tilde{\psi}_{jn}(r)$$

mit

$$\int_V \tilde{\psi}_{km} \psi_{jn} dV = \delta_{jk} \delta_{mn}$$

$$(\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{für } m = n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{ist das Kroneckersymbol}).$$

Nun wird  $Y$  nach den  $\psi_{jn}$  entwickelt: x)

$$Y(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^3 a_{jn}(t) \cdot \psi_{jn}(r) .$$

In (13.4) eingesetzt, erhält man

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^3 \dot{a}_{jn}(t) \psi_{jn}(r) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^3 a_{jn}(t) L \psi_{jn}(r) - S(r, t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^3 p_{jn} a_{jn}(t) \psi_{jn}(r) - S(r, t) . \end{aligned}$$

Multiplikation mit  $\tilde{\psi}_{km}(r)$  und Integration über das Reaktorvolumen führt zu

$$(13.7) \quad \dot{s}_{km} = p_{km} a_{km} - \int_V S(r, t) \tilde{\psi}_{km}(r) dV.$$

Bezeichnet man

$$(13.8) \quad s_{km}(t) = \int_V S(r, t) \tilde{\psi}_{km}(r) dV,$$

wird aus (13.7)

---

x) Die Vollständigkeit der  $\psi_{jn}$  konnte bisher noch nicht gezeigt werden. Jedoch hat FONSECA [45] 1973 gezeigt, daß ein orthonormiertes System von Eigenfunktionen existiert, bei dem wie bei den Kaplanmoden ein entkoppeltes System von Differentialgleichungen entsteht, das darüber hinaus aber noch vollständig ist.

$$(13.9) \quad \dot{a}_{km}(t) = p_{km} a_{km}(t) - s_{km}(t) \quad \text{für alle } k$$

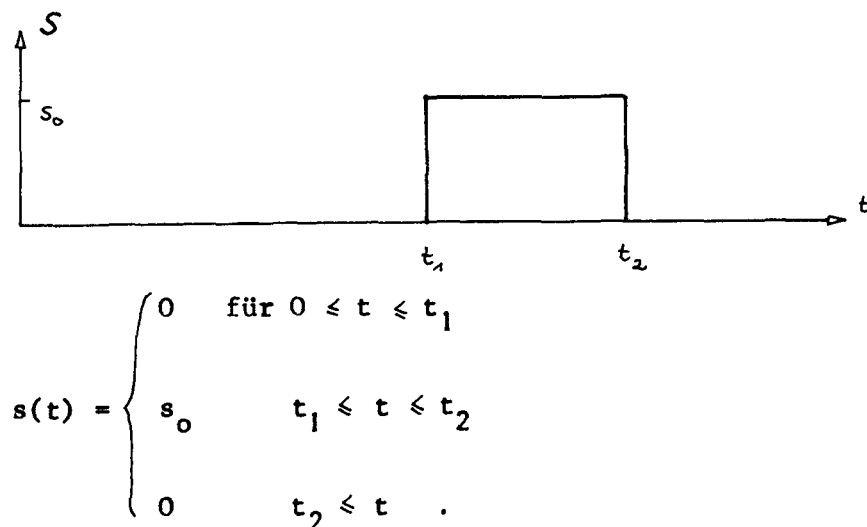
und alle  $m$ .

Zu erwähnen ist noch, daß  $S(r,t)$  ein zeitlicher Rechteckimpuls war und damit  $s_{km}(t)$  gleichartigen Verlauf hat, denn durch die Volumenintegration ändert sich das Zeitverhalten nicht. Das bedeutet aber allerdings, daß  $s_{jn}$  für jeden Mode einen anderen Verlauf hat.

(13.9) ist die Differentialgleichung für das Zeitverhalten jedes Modes. Nach [172] sind die Kaplanmoden einzeln regelbar, ohne einander zu stören. Zur Vereinfachung können wir in (13.9) also die Indizierung weglassen und erhalten

$$(13.10) \quad \dot{a} = ap - s.$$

Den Gedankengängen in [31] folgend wird angenommen, daß mit einem Rechteckimpuls der stationäre Zustand erreicht werden soll.  $S$  hat also die Gestalt



Die Lösung von (13.10) ist

$$(13.11) \quad a(t) = \begin{cases} K e^{pt} & \text{für } 0 \leq t \leq t_1 \\ a(t_1) e^{p(t-t_1)} + \frac{s}{p} e^{pt} \cdot \left[ e^{-pt} - e^{-pt_1} \right] & \text{für } t_1 \leq t \leq t_2 \end{cases},$$

wovon man sich leicht durch Einsetzen überzeugt.

Nun soll für  $t_2$  der stationäre Zustand erreicht sein:

$$Y(t_2) = 0 ,$$

also  $a(t_2) = 0.$

Daraus folgt

$$a(t_1)e^{p(t_2-t_1)} = -\frac{s}{p} e^{pt_2} \cdot \left[ e^{-pt_2} - e^{-pt_1} \right]$$

und somit

$$a(t_1)e^{-pt_1} = -\frac{s}{p} \left[ e^{-pt_2} - e^{-pt_1} \right] .$$

Sei

$$(13.12) \quad c = e^{-pt_1} - e^{-pt_2}$$

dann ist

$$(13.13) \quad c = \frac{a(t_1)p}{s} e^{-pt_1} ,$$

(13.11) kann umgeschrieben werden in

$$a(t) - \frac{s}{p} = \left( a(t_1) - \frac{s}{p} \right) e^{p(t-t_1)} \quad \text{für } t_1 < t < t_2 .$$

Die Einführung einer neuen Ordinate

$$\hat{a} = a - \frac{s}{p}$$

führt zu

$$\hat{a}(t) = \hat{a}(t_1) e^{p(t-t_1)}$$

Wählt man noch die neue Abszisse  $\hat{t}_1$  so, daß die Schwingung bei  $\hat{t} = 0$  ihren Extremwert annimmt, so erhält man

$$\hat{a}(0) = \hat{a}(t_1) e^{-p\hat{t}_1}.$$

Nach [31] gilt also näherungsweise

$$a(t_{\text{peak}}) = a(t_1) e^{-pt_1}.$$

Damit erhält man für (13.13)

$$(13.14) \quad c = \frac{a(t_1)p}{s} e^{-pt_1} = \frac{p}{s} a(t_{\text{peak}}).$$

$c$  ist also konstant, d.h. orts- und zeitunabhängig, jedoch abhängig vom Schwingungsmodus, von der Schwingungsamplitude und von der Stabstärke.

Zu erwähnen ist noch, daß  $c$  komplex ist, da auch  $p$  komplex ist.

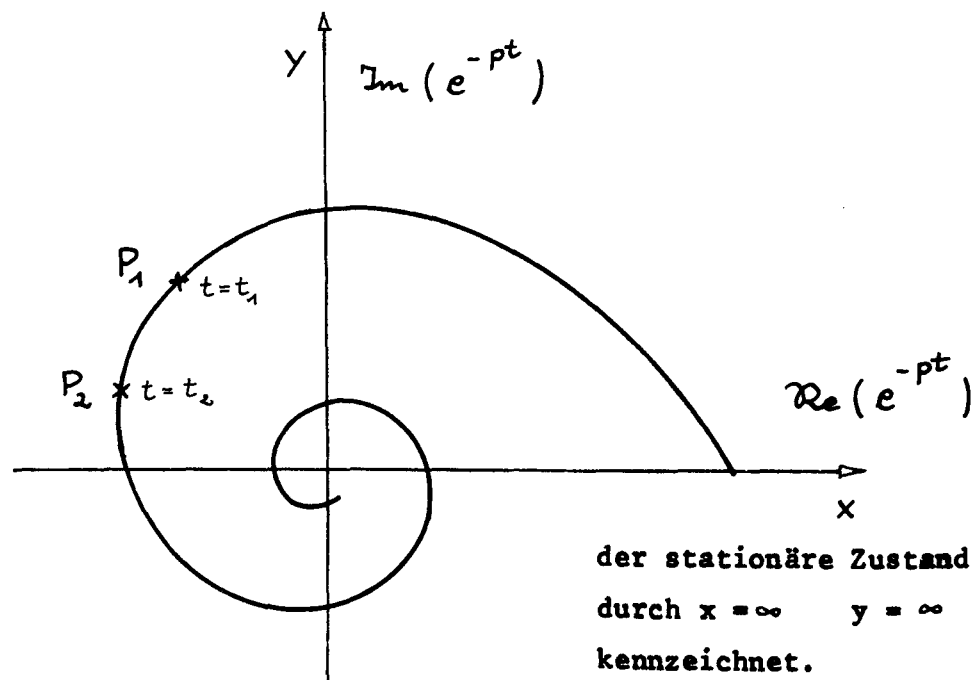
### § 14 Interpretation und Stabilität

Ausgangspunkt zur Bestimmung der Regelzeiten  $t_1$  und  $t_2$  ist (13.12) mit (13.14)

$$(14.1) \quad c = e^{-pt_1} - e^{-pt_2}.$$

Da  $c$  und  $p$  komplex sind, sind dies 2 Gleichungen zur Bestimmung von  $t_1$  und  $t_2$ .

Trägt man nun  $e^{-pt}$  in der komplexen Zahlenebene auf (man bezeichnet dies als inverses Nyquistdiagramm), so wird  $e^{-pt}$  bei einem System mit zunehmender Schwingungsamplitude zu einer sich einwärts im positiven Sinne drehenden Spirale.



$t$  ist Kurvenparameter. Jedoch ist  $t$  nicht die Bogenlänge, sondern näherungsweise die Winkelgeschwindigkeit.

Seien nun

$$e^{-pt_1} = x_1 + iy_1 \quad (P_1)$$

$$e^{-pt_2} = x_2 + iy_2 \quad (P_2),$$

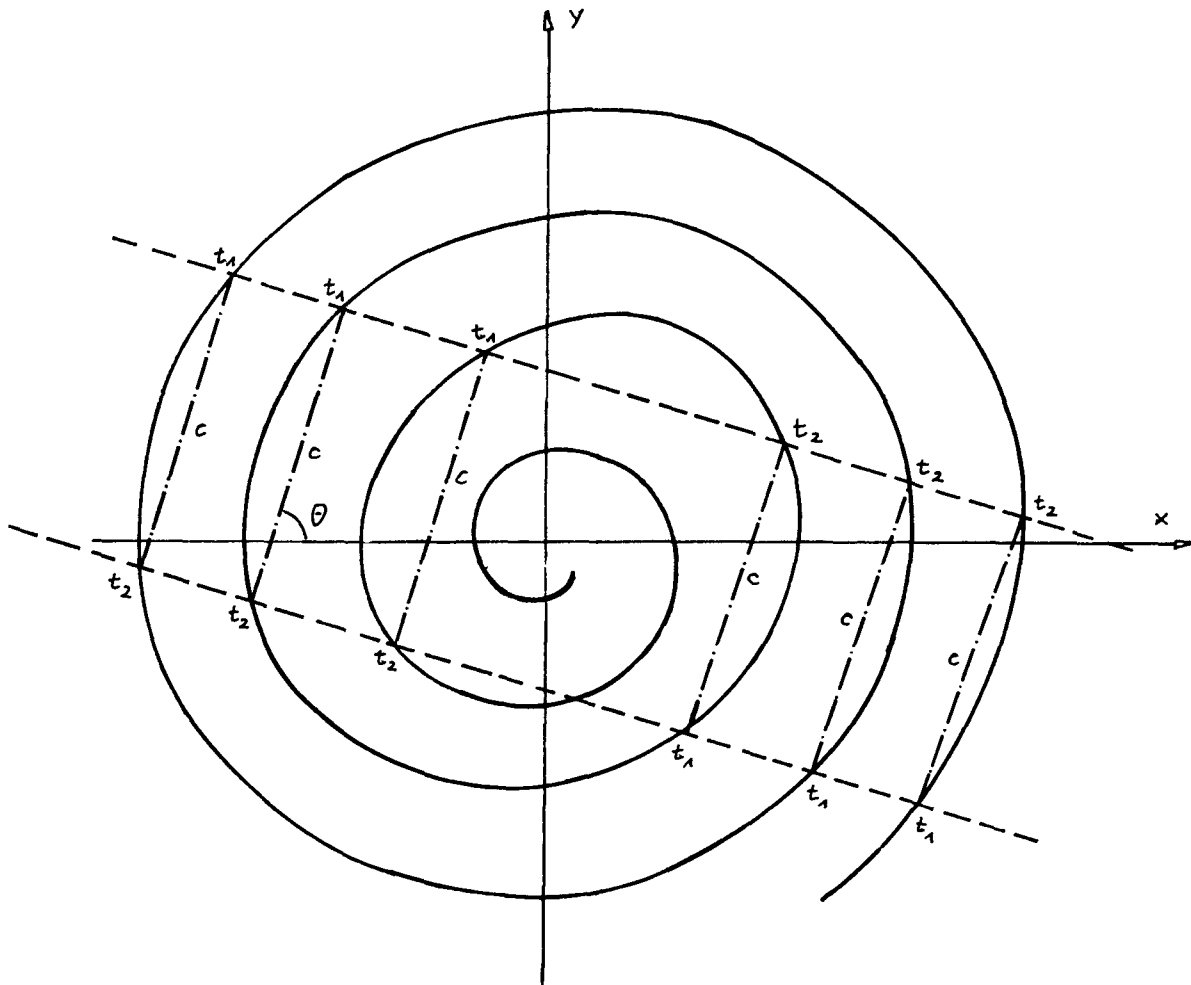
so gilt

$$\overline{P_1 P_2} = |e^{-pt_1} - e^{-pt_2}| = |c| = \text{const.}$$

und

$$\arg(\overline{P_1 P_2}) = \arctan \frac{\text{Im}(\overline{P_1 P_2})}{\text{Re}(\overline{P_1 P_2})} = \arctan \frac{\text{Im } c}{\text{Re } c} = \arctan c = \theta = \text{const}$$

Damit muß also der freie konstante Vektor  $c$  in die Spirale eingepaßt werden, d.h. mit beiden Enden auf gleichen Halbbögen liegen.



Die so erzeugten Strecken definieren näherungsweise einen Streifen in zentraler Lage, den sog. Regelungsstreifen (siehe Bild).

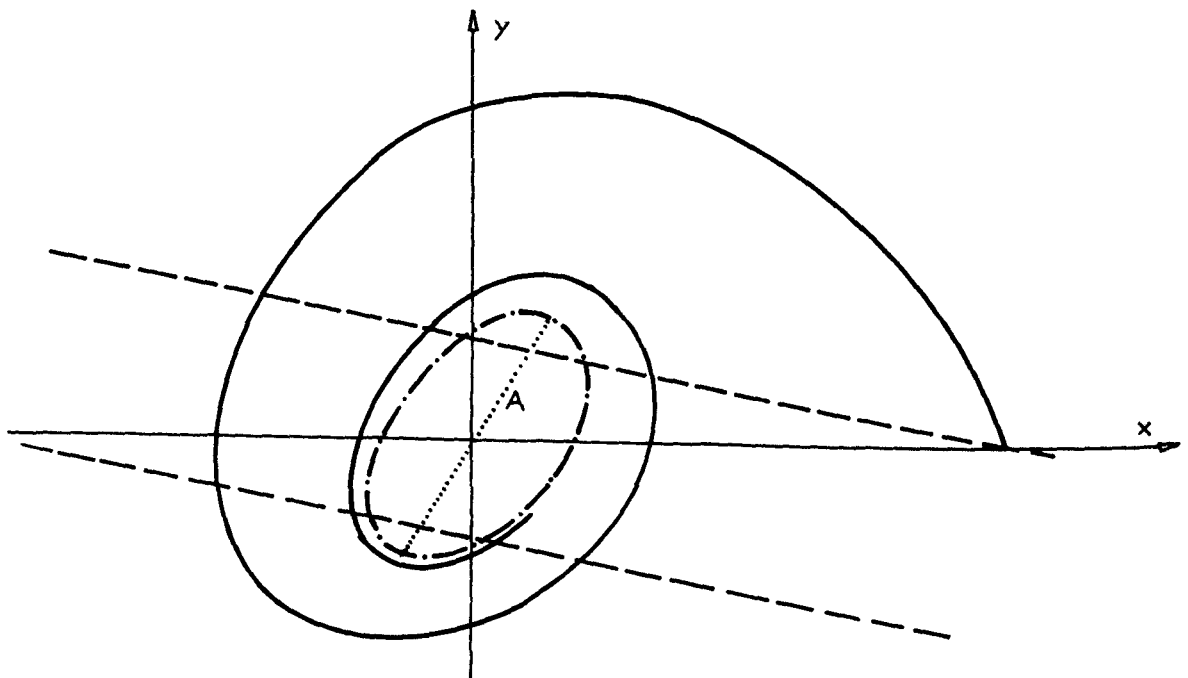
Daraus lassen sich zwei Ergebnisse ablesen:

- 1) Je Schwingung existiert ein Regelintervall.  
(Die aus dem obigen Bild fälschlich ablesbaren 2 Regelungsmöglichkeiten je Schwingung würden sich ergeben, wenn es die Regelstabellestellung  $+U$ ,  $0$ ,  $-U$  gäbe).
- 2) Der Mittelpunkt der möglichen Regelintervalle (näherungsweise eine Ursprungsgerade) besitzt fast konstante Phasen zum Schwingungsmaximum.

Den Gültigkeitsbereich des Modells haben wir längst verlassen, denn durch den Störansatz gilt die Spirale nur "weit draußen", d.h. in der Nähe der stationären Lösung. Trotzdem ist diese Darstellung sehr hilfreich und liefert auch Ergebnisse, die sich bei größerer Störung, d.h. im nicht linearen Modell, bewähren.

Dann ist es auch möglich, das Modell noch weiter zu verlassen und sich der Realität zu nähern.

So wird z.B. ein nichtstabiler Reaktor nicht mit immer wachsender Amplitude schwingen, sondern sich aufgrund der Nichtlinearitäten einer Grenzamplitude nähern; in unserem Modell wird sich die Spirale dann einer Minimalkurve nähern.

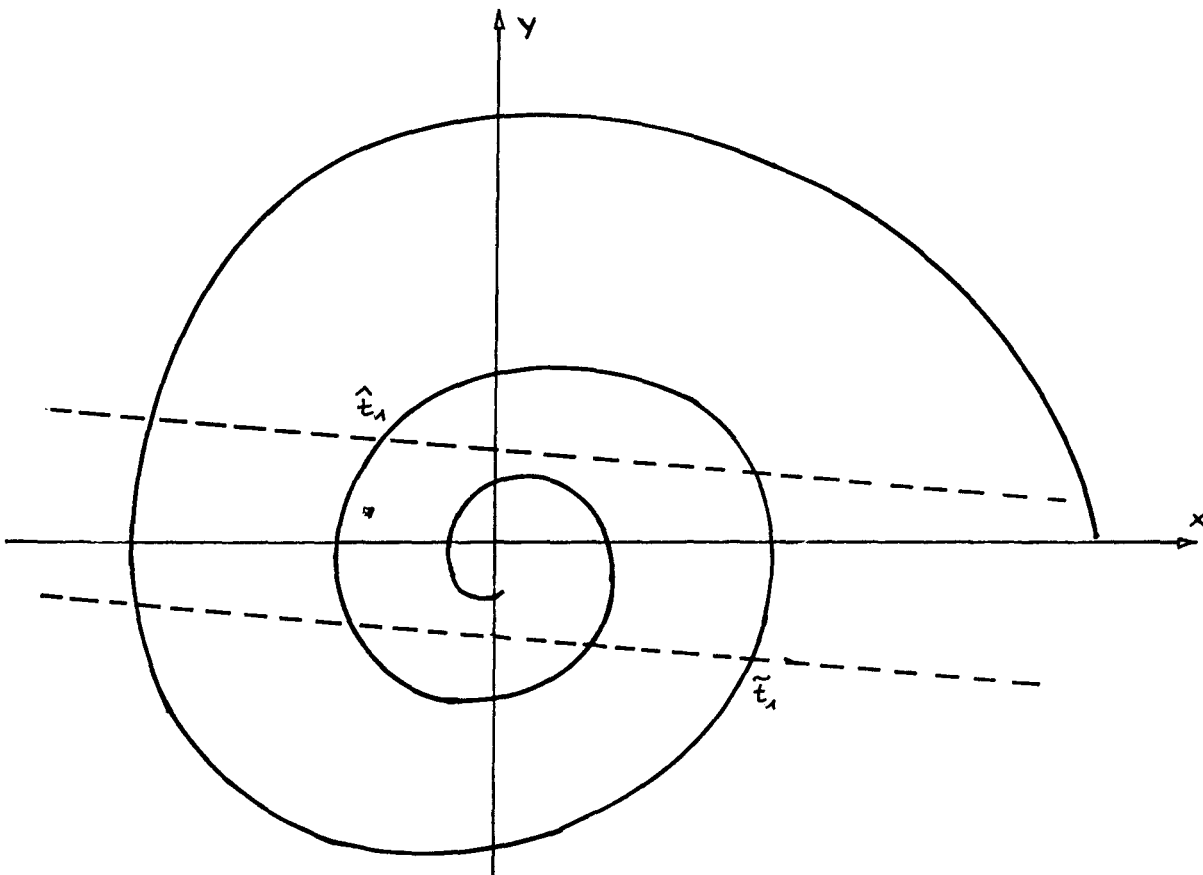




Sei  $A$  der Durchmesser in  $\theta$  - Richtung, so bedeutet dies:

für  $A > |c|$  ist der Reaktor stabilisierbar oder regelbar.  
Dies kann globale Regelbarkeit genannt werden  
(siehe oberes Bild).

für  $A < |c|$  gibt es einen Zeitpunkt, an dem der Reaktor letzt-  
mals durch einen Regelimpuls zum stationären Zustand  
gebracht werden kann. Diesen können wir den theoretisch  
letzten Regelbarkeitszeitpunkt nennen.



Je nachdem, wie der Stab gefahren werden kann, ist  $\hat{t}_1$  oder  $\tilde{t}_1$  der  
theoretisch letzte Regelbarkeitszeitpunkt.

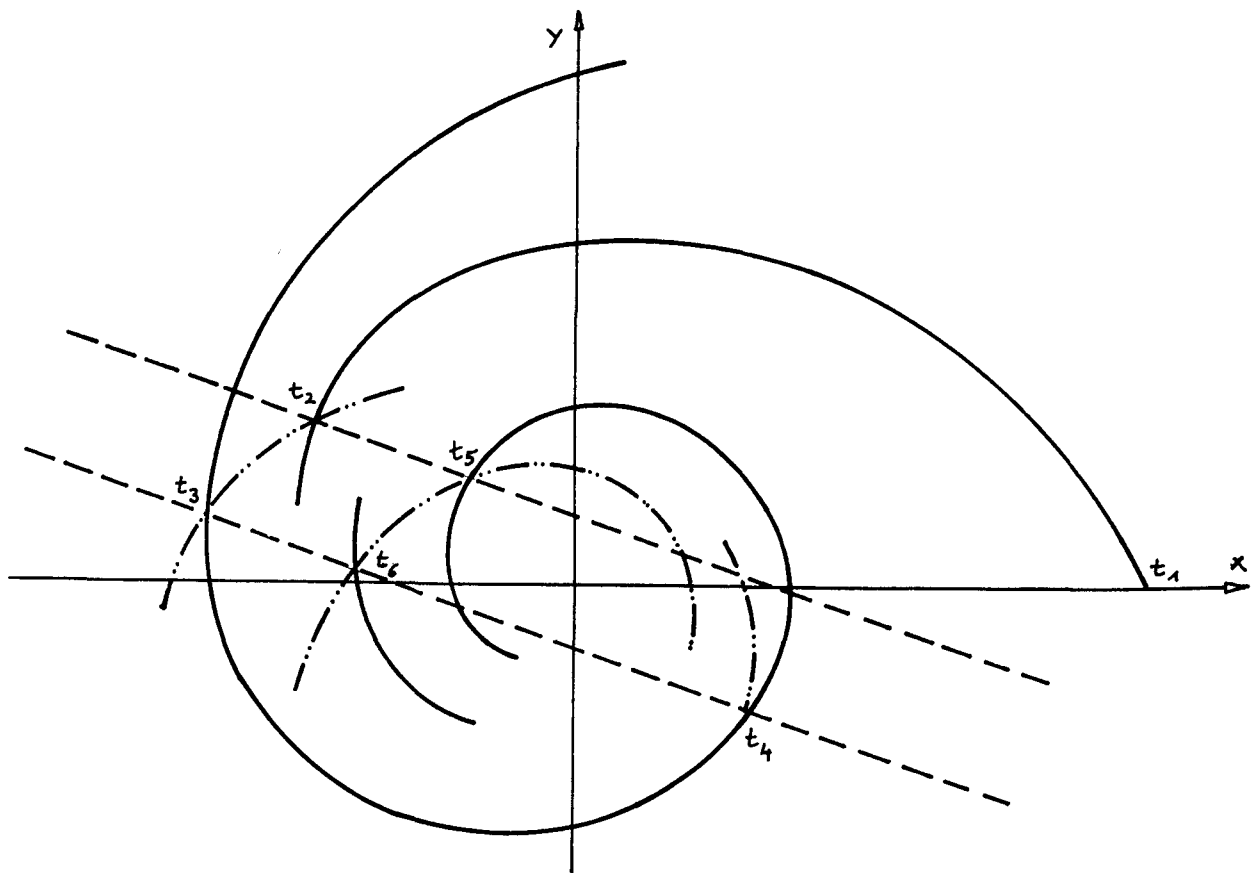
Aber die Realitätsnähe ist noch weiter zu treiben:

Durch den Regelaufwand wird die Amplitude kleiner, die Kurve also  
gewissermaßen nach außen gezogen.

Bei eingefahrenem Regelstab, d.h. bei veränderter dann aber konstanter  
Absorption, bleibt ein instabiler Reaktor i.a. instabil.

Das Verhalten des Modes wird also auch durch eine Spirale beschreibbar sein. Da jedoch eine andere Grenzschrwingung erreicht wird, wird das Verhalten bei Regelung näherungsweise im Modell als eine Spirale mit verändertem Mittelpunkt dargestellt werden können.

Dann ist auch erkennbar, daß es je Schwingung nur eine Regelungsmöglichkeit gibt, denn wenn der Streifen die Spirale auf der anderen Seite schneidet, wird die Schwingung nicht gedämpft, sondern vergrößert.



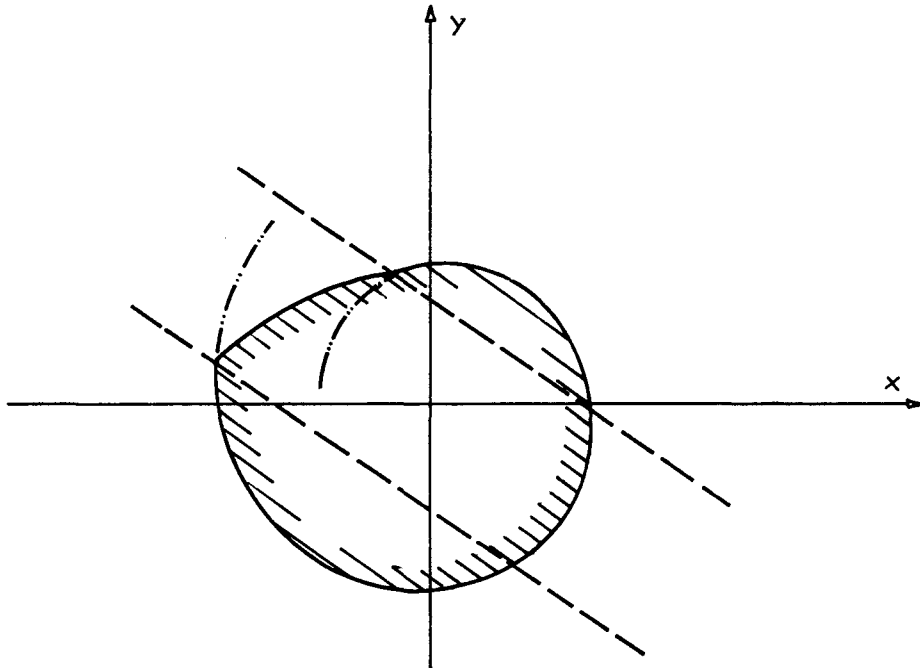
Verfolgen wir in obigem Bild einen Reaktor vom Zustand  $t_1$  ab. Von  $t_2$  bis  $t_3$  wird geregelt, die Schwingung verkleinert. Würde zum Zeitpunkt  $t_4$  wieder geregelt, so wird die Regelung die Amplitude beträchtlich vergrößern. Die nächste mögliche Regelung ist erst wieder von  $t_5$  bis  $t_6$  möglich.

Insgesamt aber wächst trotz Regelung die Amplitude weiter an, der Reaktor ist also nicht stabilisierbar und wird seine Grenzkurve, d.h. seine durch die Nichtlinearitäten bewirkte Grenzschrwingung erreichen.

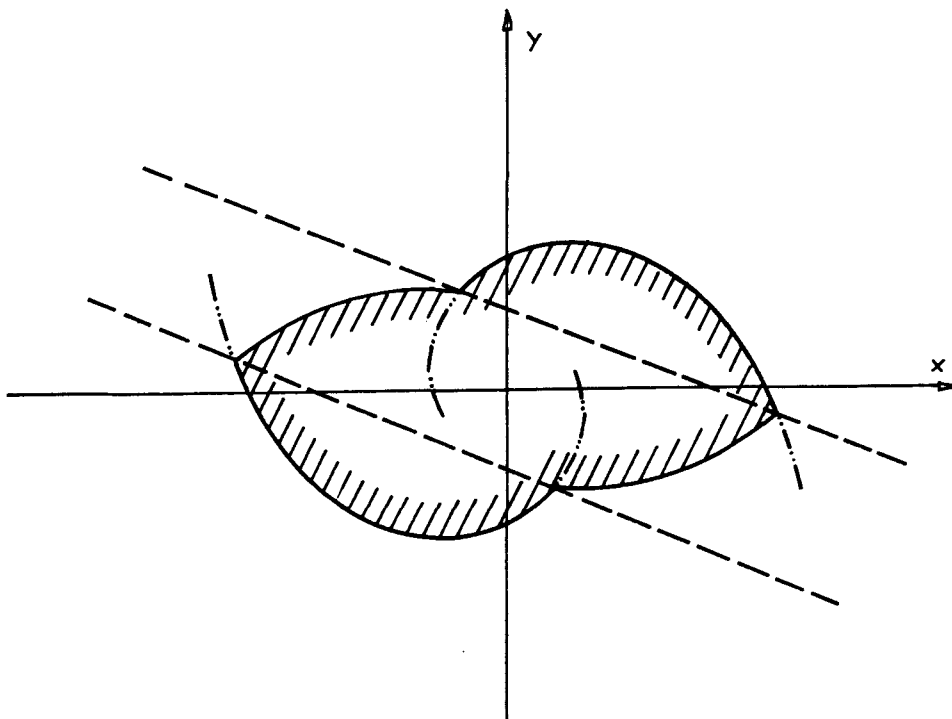
Durch diese Diagramme kann auch die in [54] geforderte praktische Stabilitätsgrenze veranschaulicht werden.

Die verstärkte Linie im nächsten Bild bildet die Stabilitätsgrenze, denn sie stellt bei maximalem Regelaufwand gerade eine stationäre Schwingung dar.

Jeder Zustand außerhalb des schraffierten Gebietes ist regelbar zum stationären Zustand hin.



Und zum Schluß wird die Stabilitätsgrenze eines Plattenreaktors mit 2 symmetrisch angeordneten Stäben gezeigt:



### § 15 Neues Verfahren

In [45] wird bewiesen, daß durch  $N$  Regelstäbe  $N$  verschiedene Oberschwingungen ausgeregelt werden können. Wegen der Endlichkeit der Zahl der Regelstäbe ist es also nicht möglich, den stationären Zustand exakt zu erreichen.

So ist es eine sinnvolle Forderung, die Abweichungen von Jod und Xenon vom Stationären möglichst klein zu halten, also etwa

$$(15.1) \quad Q(t) = \int_V \left[ m_I (I - I^*)^2 + m_X (X - X^*)^2 \right] dV$$

zu minimieren, wobei  $m_I$  und  $m_X$  Gewichtungsfunktionen sind.

Zuerst ist festzustellen, daß  $m_I$  und  $m_X$  dimensionsgleich sind.

3 verschiedene Möglichkeiten für die Gewichtungsfunktionen bieten sich an:

A:  $m_I = 1$

$$m_X = 1$$

Damit mißt man die quadratischen Abweichungen der absoluten Anzahl der Jod- und Xenonteilchen.

B:  $m_I = \frac{1}{\int_V (I^*)^2 dV}$

$$m_X = \frac{1}{\int_V (X^*)^2 dV}$$

Damit wichtet man die Teilchen entsprechend ihres Anteiles im stationären Falle.

C:  $m_I = \frac{1}{(I^*)^2}$

$$m_X = \frac{1}{(X^*)^2}$$

Mit diesen Gewichten werden relative Abweichungsquadrate gemessen.

Jede dieser Möglichkeiten ist verwendbar. Wenn man jedoch berücksichtigt, daß eine Änderung des Jod um 10 % eine Änderung des Xenons um nahezu 10 % nach sich zieht, so ist C der Vorzug zu geben.

Wir haben für die zu messende Funktion also insgesamt

$$(15.2) \quad Q(t) = \int_V \left[ \left( \frac{I - I^*}{I^*} \right)^2 + \left( \frac{X - X^*}{X^*} \right)^2 \right] dV .$$

Da aber  $Q(t) = 0$  nicht erfüllbar ist, können wir die in (11.2) formulierte Form der Endwertregelung nicht fordern.

Mit Hilfe von (15.2) soll nun ein neues Funktional gefunden werden, so daß aber die Möglichkeit der Regelstabdarstellung nicht verloren geht.

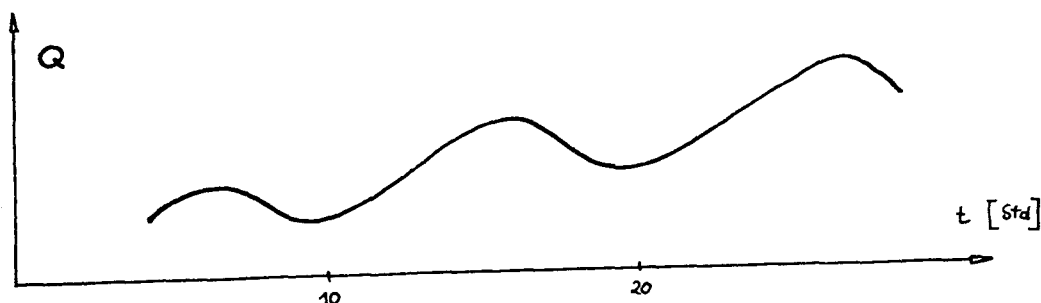
Zuerst können wir  $T$  nicht mehr minimieren, sondern müssen einen festen Zeitpunkt  $T_1$  annehmen.

Es soll also bei gegebenem Anfangswert im Bereich  $[0, T_1]$  geregelt werden können und dann ein Funktional minimiert werden. Dabei wird sinnvollerweise das Regelintervall mindestens eine Periodenlänge der Xenonschwingung betragen. Im HTR-Bereich haben Xenonschwingungen eine Periode von ca. 20 - 30 Std. Man wird also

$$T_1 \geq 36 \text{ Std.}$$

annehmen.

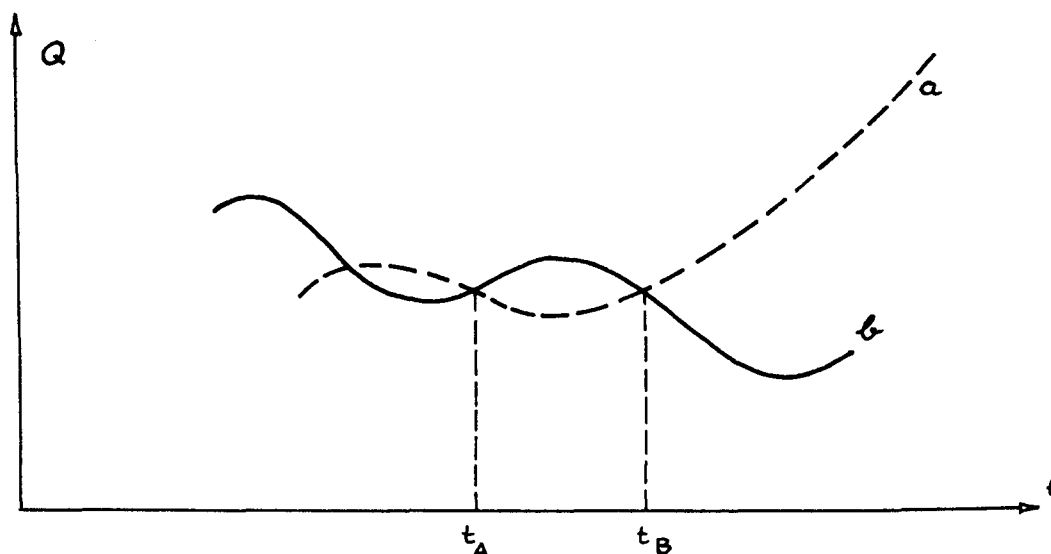
Jod und Xenon haben gleiche Schwingungsdauer. Damit schwingt  $Q(t)$  (als quadratische Funktion) mit einer Periode von ca. 10 - 15 Std.



Für das Funktional gibt es verschiedene Möglichkeiten:

1)  $F = Q(T_1)$

Da jedoch in der Wahl von  $T_1$  eine gewisse Willkür besteht, können sich dadurch Schwierigkeiten ergeben, wie das folgende Bild zeigt:



Obgleich Fall b das anschaulich bessere Ergebnis zeigt, würde b im Bereich  $t_A < T_1 < t_B$  das größere Funktional  $F = Q(T_1)$  besitzen. Damit ist diese Möglichkeit vom praktischen Standpunkt aus abzulehnen.

- 2) Um den Nachteil aus 1) zu beheben, wäre es möglich, das Minimum von  $Q(t)$  mit  $t \in [T_1, T_2]$  zu suchen, wobei  $T_1$  und  $T_2$  passend gewählt, aber fest sind. <sup>x)</sup>

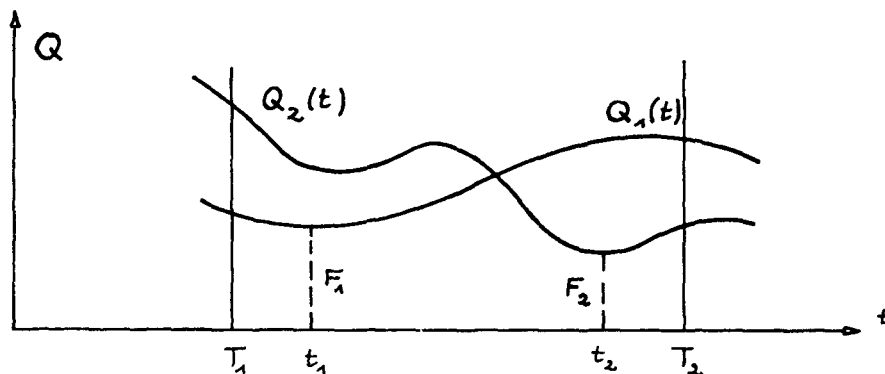
$$F = \min_{t \in [T_1, T_2]} Q(t) .$$

Damit ist aber  $F = F(u)$  kein stetig differenzierbares Funktional. Denn sei  $Q$  das von  $u_1$  und  $Q_2$  das von  $u_2$  erzeugte Funktional (siehe Bild),  $F_1$  und  $F_2$  je deren Minimum in  $[T_1, T_2]$  ,

- x) Das Prinzip der Endwertregelung geht damit nicht verloren, denn da für  $t > T_1$  nicht mehr geregelt wird, ist

$$F(Q(t) | t > T_1) = H(T_1) ,$$

wenn auch nicht explizit angebbar.



so ist z.B. bei stetiger Änderung von  $u(u_1 \rightarrow u_2)$   $F$  nicht mehr differenzierbar und der Zeitpunkt des Minimums  $t_1$  nicht mehr stetig von  $u$  abhängig. Diese Möglichkeit ist also aus numerischen Gründen wenig brauchbar.

- 3) Eine weitere Wahl ist das Integral zwischen festen Zeitpunkten

$$(15.3) \quad F = \min_{T_1} \int_{T_1}^{T_1 + \tau} Q(t) dt$$

mit festem  $\tau$ .

Jetzt ist  $F(u)$  stetig differenzierbar.

$Q(t)$  besitzt eine Periode von 10 - 15 Std; somit scheint jedes  $\tau \in [10, 15]$  eine gute Meßperiode zu sein, wobei im Einzelfall zu prüfen ist, ob nicht auch noch kleinere Meßintervalle brauchbare Ergebnisse liefern können.

Man sieht, daß  $F$  von  $T_1$  abhängig ist. Um also möglichst weitgehende Aussagen zu erhalten, sollte man versuchen, den Einfluß von  $T_1$  auf  $F$  minimal zu halten.

Dies wird dann der Fall sein, wenn  $\tau$  dem statistischen Mittel der Schwingungsperioden von  $Q(t)$  angeglichen wird.

Z.B. ist  $F$  von  $T_1$  unabhängig, wenn  $Q(t)$  eine reine Schwingung und  $\tau$  deren Periode ist.

Insgesamt ist also der Fall 3 vorzuziehen.

### § 16 Hamilton - Prinzip

Damit ist insgesamt das Problem entstanden:

Für das Gleichungssystem

$$(16.1) \quad \frac{1}{v} \dot{\phi} = D\Delta\phi + (vF - \Sigma - \sigma X)\phi - u\phi$$

$$\dot{I} = y_i F \phi - c_i I$$

$$\dot{X} = y_x F \phi + c_i I - c_x X - \sigma X \phi$$

mit den Randwerten

$$\phi = 0 \text{ auf } \mathcal{R} \text{ für alle } t$$

und den Anfangswerten

$$I(r, 0) = I_0(r)$$

$$X(r, 0) = X_0(r)$$

ist

$$(16.2) \quad u(r, t) = \sum_{j=1}^M g_j f_j(r) a_j(t)$$

mit festen Werten  $g_j$  und festen Funktionen  $f_j(r)$  so zu bestimmen, daß

$$(16.3) \quad F = \int_{T_1}^{T_1 + \tau} Q(t) dt$$

mit

$$Q(t) = \int_V \left[ \left( \frac{I - I^*}{I^*} \right)^2 + \left( \frac{X - X^*}{X^*} \right)^2 \right] dV$$

bei vorgegebenen Werten  $T_1$  und  $\tau$  minimal wird.



Für (16.3) lautet also die Hamiltonfunktion

$$(16.4) \quad H = - \left( \frac{I-I^*}{I^*} \right)^2 - \left( \frac{X-X^*}{X^*} \right)^2$$

Und unter Verwendung von (16.1) lautet die erweiterte Hamiltonfunktion

$$(16.5) \quad H = - \left( \frac{I-I^*}{I^*} \right)^2 - \left( \frac{X-X^*}{X^*} \right)^2 \\ + w_1 v \left[ D\Delta\phi + (vF - \Sigma - \sigma X)\phi - u\phi \right] \\ + w_2 \left[ y_i F\phi - c_i I \right] \\ + w_3 \left[ y_x F\phi + c_i I - c_x X - \sigma X\phi \right].$$

Nun muß  $H$  maximal sein bzgl.  $u$ . Es muß also gelten

$$(16.6) \quad H = \frac{\delta H}{\delta u} \cdot \delta u = 0,$$

also

$$w_1 v \phi \delta u = 0.$$

Wegen  $\phi \neq 0$ ,  $v \neq 0$  und nach § 11 auch  $w_1 \neq 0$  folgt daraus

$$(16.7) \quad \delta u = 0.$$

In Analogie zu üblichen Schlußweisen bei linearen Kontrollproblemen mit einer Ortsveränderlichen [57,79,157] folgt aus (16.7)

$$(16.8) \quad u = \text{const (stückweise)}$$

Für nichtlineare Kontrollprobleme siehe dazu [57,76] und für Systeme mit verteilten Parametern (distributed parameter system: Kontrollprobleme bei mehreren Ortsveränderlichen und partiellen Differentialgleichungen) etwa [19,39,87,163,166].

Aus (16.8) folgt aus der Extremalforderung von H

$$(16.9) \quad u = \begin{cases} 0 & \text{für } w_1 < 0 \\ U & \text{für } w_1 > 0 \end{cases} .$$

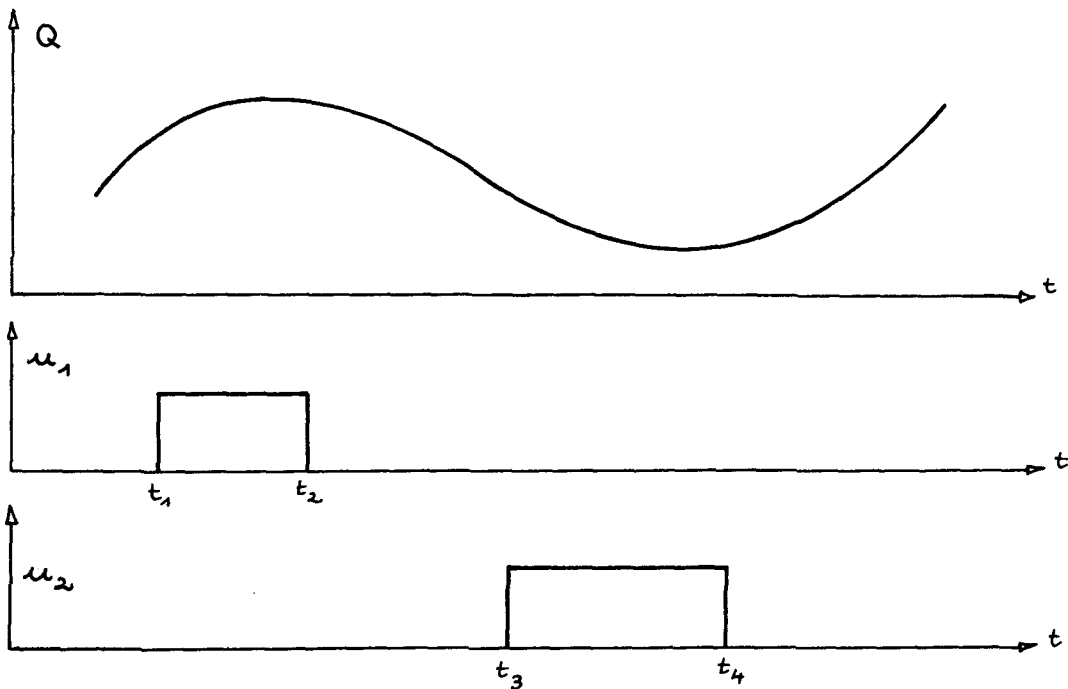
Somit ist auch bei geändertem Funktional (16.3) die Regelung vom Bang-bang-Typ. Und damit ist die Regelung eindeutig bestimmt, wenn für jeden Stab die Schaltzeiten bekannt sind.

### § 17 Minimierung des Funktionals

Nach den Ergebnissen von § 13 wird je Periode einmal geregelt.  
Mit der Beschränkung

auf 2 Regelstäbe und  
auf ein Regelintervall von ungefähr einer Periode

wird es also 4 Schaltzeiten geben:  $t_1$   $t_2$   $t_3$   $t_4$



also

$$(17.1) \quad F = F(u) = F(t_1, t_2, t_3, t_4).$$

Zwar muß noch

$$(17.2) \quad \begin{aligned} t_2 &\geq t_1 \\ t_4 &\geq t_3 \end{aligned}$$

als Nebenbedingung berücksichtigt werden; dies ist aber erfüllt, falls wir den Reaktor als regelbar voraussetzen.

Ein Gradientenverfahren zur Bestimmung des Minimums von (17.1) hat sich wegen der Kompliziertheit der Schrittsteuerung und wegen der Nebenbedingung (17.2) als wenig geeignet erwiesen. x)

Das angewendete Minimierungsverfahren sei für 2 Veränderliche  $t_1$  und  $t_2$  erläutert:

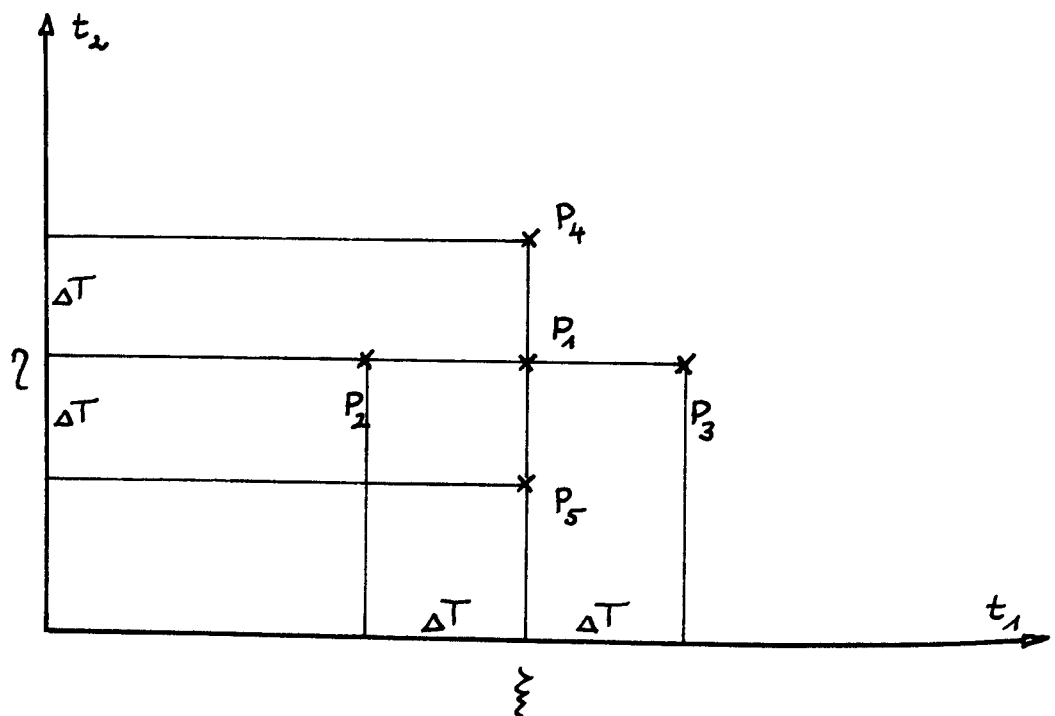
Der Punkt  $P_1(t_1 = \xi ; t_2 = \eta)$  bezeichne die Anfangssteuerung. Zu  $P_1$  werden 4 Nachbarpunkte gewählt

$$P_2: t_1 = \xi - \Delta T; t_2 = \eta$$

$$P_3: t_1 = \xi + \Delta T; t_2 = \eta$$

$$P_4: t_1 = \xi \quad ; t_2 = \eta + \Delta T$$

$$P_5: t_1 = \xi \quad ; t_2 = \eta - \Delta T$$




---

x) Die Lösung erfüllt zwar (17.2), jedoch kann nicht garantiert werden, daß die durch das Verfahren erzeugten Näherungen dies auch tun.

Für alle  $P_j$  wird  $F_j = F(P_j)$   $j = 1, \dots, 5$  berechnet.

Das Minimum sei

$$F_k = \min_j F_j$$

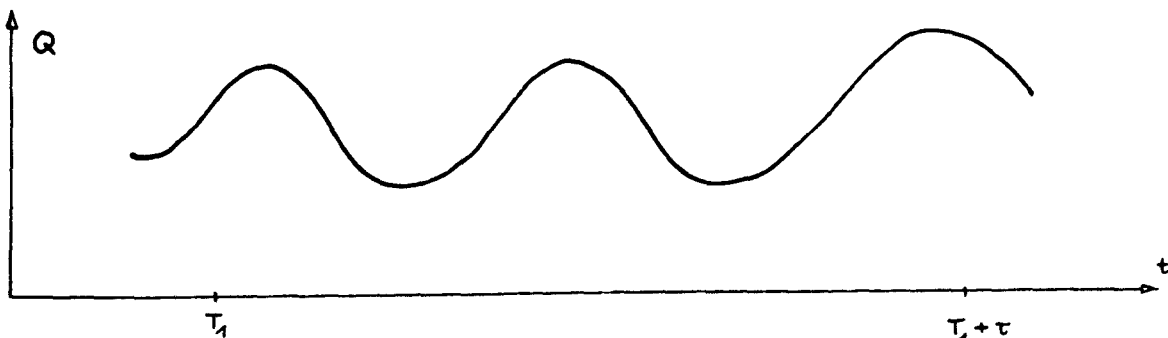
Für  $F_k \neq F_1$  wird  $F_k$  als neuer Zentralpunkt  $F_1$  genommen und das Verfahren wiederholt, für  $F_k = F_1$  wird die Schnittweite  $\Delta T$  halbiert und weitergerechnet.

Der Prozeß wird abgebrochen, falls  $\Delta T$  eine vorgegebene Schranke unterschreitet.

Das Verfahren gelangt also in die Nähe eines relativen Minimums. Dort wird versucht, durch Verfeinerung der Schrittweite das Minimum genauer einzuschließen.

Dieses Verfahren <sup>x)</sup> hat sich zwar nicht als besonders schnell, aber als besonders sicher erwiesen.

Während ein Gradientenverfahren wenig effektiv war, was den Verdacht unterstützt, daß  $F(u)$  eine Feinstruktur besitzt und nicht hinreichend glatt ist, führte das oben beschriebene Verfahren nur dann zu einem falschen (d.h. nicht globalen) Minimum, wenn die Q-Funktion der freien Schwingung nicht 2 sondern 3 Regelungen nahelegte, was an folgendem Bild erläutert werden soll:




---

x) Auf programmtechnische Einzelheiten zur Beschleunigung soll hier nicht eingegangen werden.

B NUMERIK§ 18 Ausgangsdaten

Die Ausgangsdaten können in 4 Klassen eingeteilt werden:

1. Materialparameter
2. Diskretisierungsparameter
3. Reaktorparameter
4. Optimierungsparameter .

1. Materialparameter

Dies sind die festen Materialdaten (Materialkonstanten)

$$y_i = 0,0625 \quad \text{Spaltausbeute für Jod}$$

$$y_x = 0,002 \quad \text{Spaltausbeute für Xenon}$$

$$c_i = 2,1 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{sec}} \quad \text{Zerfallskonstante für Jod}$$

$$c_x = 2,94 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{sec}} \quad \text{Zerfallskonstante für Xenon}$$

$$\nu = 2,42 \quad \text{Neutronenvermehrungsfaktor .}$$

2. Diskretisierungsparameter

Dies sind solche Daten, die zwar physikalisch frei sind, jedoch aus numerischen Gründen gewählt werden und fest bleiben

$$\Delta x = 20 \text{ cm}$$

$$\Delta t = 1 \text{ Std}$$

$$\Delta T = 1 \text{ Std (zur Definition von } \Delta T \text{ siehe § 17) .}$$

$\Delta x$ : Es wurde angestrebt, so wenig Ortsstützstellen wie möglich zu haben. Gewählt wurde eine Stützstellenzahl, die

physikalisch signifikante Ergebnisse

und

mit sinnvollem Aufwand numerisch behandelbare Probleme

liefert.

$\Delta t$ : Es ist bekannt, daß die Ergebnisse der Xenonberechnungen von der zeitlichen Schrittweite  $\Delta t$  abhängen [113]. Wir haben die allgemein akzeptierte Schrittweite von 2 Std. deutlich unterschritten.

$\Delta T$ : Als Startsuchschritt bei der Minimierung wurde die Zeitlänge 1 Std. gewählt. Sie liegt so hoch, daß erfahrungsgemäß gute Wahrscheinlichkeit besteht, das globale Maximum zu finden, obgleich das Verfahren i.a. einen lokalen Extremwert findet.

Nach [54] ist die Abhängigkeit von den Anfangswerten  $I_0(r)$  und  $X_0(r)$  sehr gering. Sie wurden daher nicht variiert und wie folgt berechnet:

für  $t = 0$  wurde ein stationärer Jodverlauf und ein im Ort linearer Xenonverlauf ( $2 X_{\text{links}} = X_{\text{rechts}}$ ) angenommen. Diese unrealistische Annahme führt zu einer Schwingung, und der sich für  $t = 20$  Std. ergebende Zustand, der nahe einer extremen Auslenkung liegt, wurde als Ausgangswert für  $I_0(r)$  und  $X_0(r)$  genommen, d.h. für die Optimierung wurde dieser Zeitpunkt  $t = 20$  als Anfangszeit  $t = 0$  gewählt. Es ist anzunehmen, daß nach 20 Std. freier Schwingung ein realistischer Anfangswert entstanden ist.

Es wurde mit maximal

$$M = 2$$

Stäben gerechnet.

Für diese Parameterstudie konnte die Zahl der Stäbe nicht höher angesetzt werden, da der Rechenaufwand mit der Anzahl der Stäbe ungeheuer ansteigt.

### 3. Reaktorparameter

Darunter wollen wir Daten verstehen, die den Reaktor vom THR-Typ charakterisieren (hier handelt es sich um einen heliumgekühlten Graphitreaktor)

$$D = 1,57 \frac{1}{\text{cm}} \quad \text{Diffusionskonstante}$$

$$\sigma = 0,98 \cdot 10^{-18} \text{ cm}^2 \quad \text{Absorptionsquerschnitt von Xenon .}$$

Das Beispiel beschreibt einen homogenen Plattenreaktor.

Wir haben uns orientiert an einem HTR-Typ mit  $900 - 1100 \text{ MW}_{\text{el}}$  und die Dimension auf

$$H = 640 \text{ cm}$$

festgelegt und nicht variiert.

(In den Voruntersuchungen wurde auch  $H = 512 \text{ cm}$  verwendet und dabei nur eine geringe H-Abhängigkeit festgestellt).

Es wurde mit 2 Spaltquerschnitten gerechnet

$$F_1 = 0,0016 \frac{1}{\text{cm}} \quad (\text{Abb. 6})$$

$$F_2 = 0,0016 \left(1 - 0,025 \sin^2 \frac{\pi x}{H}\right) \quad (\text{Abb. 7}) .$$

Ein konstanter Spaltquerschnitt nach Abb. 7 ist zwar sehr viel stabiler als ein Querschnitt nach Abb. 8, jedoch gilt dies nur in der freien Schwingung. Sofern geregelt wird, sind die Unterschiede der Ergebnisse unbedeutend.

Die Absorptionsquerschnitte sind so gewählt worden (Abb. 9 bis 12), daß sich Flüsse nach Abb. 2 bis 5 ergeben; dies entspricht einer Flußüberhöhung <sup>+) von</sup>

$$f = 1,57 \text{ bis } 1,02 .$$

---

<sup>+) unter Flußüberhöhung versteht man</sup>

$$f = \frac{\phi_{\text{max}}}{\phi_{\text{mittel}}}$$



Da wir das Flußmaximum mit

$$\phi_m = 2 \cdot 10^{14} \frac{n}{\text{cm} \cdot \text{sec}^2}$$

annehmen, schwankt die Gesamtleistung des Reaktors zwischen 900 MW<sub>el</sub>, entsprechend einer Leistungsdichte von

$$L = 8,5 \frac{\text{MW}}{\text{m}} \quad (\text{bei sinusförmigem Fluß})$$

und

1100 MW<sub>el</sub>, entsprechend einer mittleren Leistungsdichte von

$$L = 10,25 \frac{\text{MW}}{\text{m}} \quad (\text{bei extrem flachem Fluß nach Abb. 5}).$$

#### 4. Optimierungsparameter

Darunter wollen wir alle Parameter verstehen, die noch frei sind und die auch frei variiert werden dürfen.

Dies sind insbesondere:

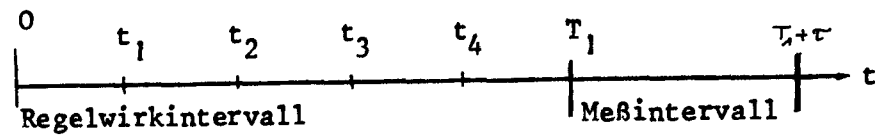
- die Stabstärke
- die Stabpositionierung
- die Länge des Meßintervalles
- der Beginn des Meßintervalles

- und alle Schranken, bei denen die verwendeten Iterationsprozesse abbrechen (z.B.  $\Delta T_v$  und die Genauigkeitsabfrage bei der Diffusionsrechnung)

Der zeitliche Beginn des Meßintervalles ist auf

$$T_1 = 36 \text{ Std.}$$

festgelegt worden.



Wenn jeder Stab eine volle Flußschwingung hat, in der er wirken kann, so benötigt man insgesamt 1,5 mal die Schwingungszeit, da zwei Schwingungslagen höchstens um die halbe Schwingungszeit verschoben sein können.

Damit ist gesichert, daß genau 4 Schaltzeiten zu optimieren sind. Eine Variation von  $T_1$  liefert nur dann Änderungen, wenn die Möglichkeit einer 3. Regelung fast vorhanden ist.

Es ist nicht möglich, alle interessierenden Parameter zu variieren. Mit erträglichem Aufwand ist es jedoch möglich, einen Teil der Parameter zu variieren, während der Rest konstant gehalten wird.

Nach dieser Teiloptimierung kann über eine andere Teilmenge von Parametern optimiert werden. Natürlich ist die entstehende optimierte Teilmenge der Parameter nicht notwendig Teilmenge des optimalen Satzes, aber dieses Verfahren ist iterativ fortsetzbar und nähert sich dem Gesamtoptimum [3].

Außerdem wird die Parametermenge immer kleiner, da man natürlich die insensitiven Parameter außer Betracht lassen kann.

### § 19 Optimale Regelzeit

Die optimalen Schaltzeiten wurden für viele Regelungs- und Reaktorparameter (§§ 20,21,22) berechnet. Aus Gründen der Rechenzeit wurde das Verfahren jedoch abgebrochen, sobald

$$\Delta T_v = 0,125 \text{ Std.}$$

erreicht war.

Das bedeutet, daß die Intervalllänge im Extremfall um weniger als 15 min. falsch ist. Zwar wurde zur Optimierung der Schaltzeiten (siehe (15.3))  $F$  minimiert, jedoch ist der absolute Betrag von  $F$  für andere Entscheidungen nicht verwendbar:

Da wir uns auf  $M = 2$  Stäbe beschränkt haben, sind nach [45] auch nur 2 Moden ausregelbar. Das bedeutet aber, daß  $F$  von anderen - mehr oder weniger vorhandenen bzw. mehr oder weniger mit ausgeregelten - Moden abhängen wird.

Damit ist es auch nicht sinnvoll,  $\Delta T$  kleiner zu wählen als eine charakteristische Zeit der nicht ausgeregelten Schwingungen. Nach unseren Rechnungen scheint dies bei  $\Delta T_v = 0,125 \text{ Std.}$  zu liegen.

Die Optimierung der Regelzeiten brachte 2 wesentliche Ergebnisse:

#### 1) Der Mittelpunkt

$$T_m = \frac{t_1 + t_2}{2}$$

des 1. Regelintervalles liegt im Mittel 2,2 Std. vor dem Maximum der  $Q$ -Funktion der freien Schwingung.

Damit ist das Ergebnis aus §§ 13,14, das unter sehr unrealistischen Voraussetzungen (z.B. Störungstheorie und nur ein Schwingungsmoden) zustande kam, numerisch bestätigt worden.

2) Dies gilt auch für den 2. Regelschritt.

$$T_n = \frac{t_3 + t_4}{2}$$

liegt ebenfalls 2,2 Std. vor dem Maximum von  $Q(t)$  der nach der ersten Regelung freien Schwingung.

Dies Ergebnis ist aus 2 Gründen bedeutsam:

a) die 2. Regelung besitzt keine konstanten Anfangswerte. Durch die Variation der Anfangswerte (als Ergebnisse der verschiedenen Endlagen der 1. Regelung) wird zusätzlich noch bewiesen, daß obige Aussagen nicht vom Anfangswert  $I_0(r)$ ,  $X_0(r)$  abhängen.

b) der 1. Regelschritt wirkt nur über  $Q(t)$  auf den 2. Regelschritt ein. Es kann also jeder Schritt einzeln in Abhängigkeit von  $Q(t)$  optimiert werden.

D.h. unter Berücksichtigung der Kopplung über  $Q(t)$  ist keine explizite Abhängigkeit des 2. Regelschrittes von  $t_1$  oder  $t_2$  vorhanden.

Diese Arbeit hat das Ziel, eine einfach zu erhaltende Strategie zu finden, deren Anwendung eine suboptimale Regelung liefert. Das letzte Ergebnis führt nun zu der Möglichkeit der sukzessiven Strategie.

Da  $F$  nicht zu Entscheidungen (im Sinne dieser Strategiesuche) verwendet werden kann, wurden die Größen

$$Z_1 = 2 (T_m + T_n)$$

$$Z_2 = g_0(t_2 - t_1) + g_0(t_2 - t_3)$$

und

$$Z_3 = \int_V \int_{T_1}^{T_1 + \tau} \mu \cdot \phi \, dV dt$$

als Entscheidungskriterien (vgl. § 21,22) verwendet.

## § 20 Einfluß der Zielfunktion

Wir wollen untersuchen, wie

$$F = \int_{T_1}^{T_1 + \tau} Q(t) dt$$

von  $\tau$  abhängig ist.

Es wurden Untersuchungen angestellt für

$$\tau = 6 \text{ Std}$$

$$\tau = 8 \text{ Std}$$

$$\tau = 11 \text{ Std}$$

und

$$\tau = 14 \text{ Std} .$$

Zu jedem Wert wurden die optimalen Schaltzeiten bei 2 Stabstärken (je 2 gleichstarke Stäbe) und 6 verschiedenen symmetrischen Stabanordnungen berechnet.

Aufgrund von Rundungs- und methodischen Fehlern ergaben sich (wie erwartet) Schwankungen von  $F$  in Abhängigkeit von den variierten Parametern, jedoch waren diese für  $\tau = 11$  minimal mit schwach erkennbarem Minimum.

Um gesicherte Werte zu erhalten, müßte der Rechenaufwand sehr viel größer sein, jedoch ist das Ergebnis vernünftig, denn  $\tau=11$  Std liegt in der Nähe der halben Xenonperiode (siehe § 15) <sup>+)</sup> .

Die Periode der Xenonschwingungen ist von vielen Parametern abhängig, u.a. auch von der Schwingungsamplitude. Bei sinnvoller Regelung nimmt aber die Amplitude ab. Das bedeutet, daß mit fortschreitender Zeit die Meßlänge  $\tau$  geändert werden müßte.

---

<sup>+)</sup>  Eine Variation über  $T_1$  kann nicht zur Bestätigung dieser Aussage herangezogen werden, da das Ergebnis damit im Bereich der zufälligen Schwankungen bleibt.

Eine numerische Verbesserung ist nur über eine größere Stichprobe zu erreichen.

Die folgenden Rechnungen sind mit  $\tau = 11$  Std (fest) durchgeführt worden, was sich als brauchbarer Mittelwert erwiesen hat.

Der so gefundene Wert hält auch einem optischen Test bei 3-D-Bildern stand:

Aus der Ergebnismenge sind 2 Fälle ausgewählt, die bei sonst gleichen Voraussetzungen sich nur in  $\tau$  unterscheiden.

Die Abb. 39-41 zeigen das Jod-, Xenon- und Flußverhalten bei  $\tau = 11$  Std und in den Abb. 42-44 wird das gleiche für  $\tau = 14$  Std gezeigt.

Wenn man außer Betracht läßt, daß alle Funktionen gegen Ende ( $t=60$  Std) wieder instabiler werden, da ja dann eine neue Regelung stattfinden müßte, so stellen die obigen Abbildungen eine Bestätigung für den gewählten Wert  $\tau = 11$  dar.

Es ist noch zu erwähnen, daß bei nicht genügend geglättetem Kurvenverlauf (z.B. bei sehr kleinem  $\tau$ ) das Suchverfahren auf ein lokales Minimum laufen kann.

### § 21 Einfluß der Stabpositionierung

Für 2 Meßintervalle und 2 Stabstärken wurden die Stäbe symmetrisch angeordnet und von  $x_0 = 80$  cm bis  $x_0 = 180$  cm in Schritten von 20 cm (symmetrisch) angeordnet. Dabei ist die Absorptionskurve der Stäbe nach § 12 angenommen.

In Abb. 45 ist  $F$  über den Stabpositionen für die Stabstärke  $g_0 = 9 \cdot 10^{-5}$  und  $\tau = 6$  Std aufgetragen. Abb. 46 enthält das gleiche Bild für  $\tau = 11$  Std. Zunächst erkennt man aus Abb. 45 und 46, daß  $F$  keine Abhängigkeit von der Stabpositionierung zeigt.

Für die Meßlänge  $\tau = 11$  Std geben die Abb. 47 die Regelzeiträume bei  $g_0 = 9 \cdot 10^{-5}$  und Abb. 48 bei  $g_0 = 11 \cdot 10^{-5}$  wieder. Dabei ist jedesmal die zweite Regellänge im verkleinerten Maßstab wiedergegeben, damit die Übersichtlichkeit erhalten bleibt.

Man erkennt das Minimum der Regelzeit beim Index  $i = 6$  (gem. Abb. 47 - 50)

$i$	4	5	6	7	8	9
$x_0$	80	100	120	140	160	180 cm .

Für eine Entscheidung nach  $Z_3$  ergibt sich aus Abb. 49 und 50 der gleiche Sachverhalt.

Eine Abhängigkeit von der Stabanordnung ist also vorhanden. Weiter ergibt sich, daß (trotz systembedingter Schwankungen) die Anordnung der Stäbe bei  $x_0 = 120$  (bzw.  $x_0 = 460$ ) den geringsten optimierten Regelaufwand ergibt:

$$\min_i \left\{ t_2 - t_1 + t_4 - t_3 \mid \min_{t_1 t_2 t_3 t_4} F \right\}$$

wird erreicht für  $i = 6$ .

Berücksichtigt man, daß bei freier Schwingung der Fluß sein Maximum bei  $x = 80$  cm und Xenon bei  $x = 100$  cm (beides im Rahmen der Schrittweite) annehmen, so bedeutet das, daß die größte Regelstabwirksamkeit erreicht wird, wenn der Stab etwas vom Maximum zur Mitte hin verschoben

wird.

Allgemein ist also zu vermuten, daß die beste Anordnung der Stäbe sich ergibt, wenn die Stäbe vom Maximum der Störung zum Maximum des stationären Flusses hin verschoben werden.

Eine Untersuchung, ob es auf das Fluß- oder das Xenonmaximum ankommt, ist wenig sinnvoll, da beide stark korreliert sind. Es ist aber auch kaum anzunehmen, daß der Abstand der Stelle größter Regelstabwirksamkeit vom Maximum von Xenon oder vom Fluß sich wird genauer bestimmen lassen.

Die so (d.h. über die Minimierung der Regelzeiten) gewonnene Entscheidung über die Positionierung wird von der Anschauung bestätigt, wie die folgenden Bilder zeigen.

Die Abb. 51, 52 und 53 zeigen die 3-D-Darstellung von Jod, Xenon und vom Fluß bei Regelstäben an den Stellen  $x_0 = 80$  cm und  $x_1 = 560$  cm. Versetzt man die Stäbe nach  $x_0 = 160$  cm und  $x_1 = 480$  cm und minimiert  $F$ , so erhält man ein Flußverhalten nach Abb. 54. Die Jod- und Xenonkonzentrationen sind in Abb. 55 und 56 dargestellt.

Man erkennt im vorderen rechten Teil des Flusses, daß ein Versetzen der Stäbe nach innen die Störung außen vergrößert.

Dies kann als Hinweis dafür verstanden werden, daß die Entscheidungsmethode nicht unsinnig ist.

Weitere Abhängigkeiten (z.B. vom Maximum des Flusses, vom Maximum der Flußströmung usw.) sind vorhanden und sollten, sofern sie berücksichtigt werden, auch wieder an anschaulichen Ergebnissen bestätigt werden.

Eine Abhängigkeit des Regelintervallmittelpunktes von der Stabanordnung hat sich nicht ergeben.



## § 22 Einfluß der Stabstärke

Auch um den Einfluß der Stabstärke kennenzulernen, wurden umfangreiche Tests durchgeführt.

Bei 2 verschiedenen Meßlängen und 11 Stabstärken wurde die optimale Regelung berechnet.

Dabei war die Stabwirkung  $g_0 \cdot \Delta t$ , wobei  $\Delta t$  die Regelungszeit ist, ungefähr konstant, d.h. sie lag innerhalb eines konstanten Schwankungstreifens.

Da Systemschwankungen nicht vermieden werden können, ist die Aussage naheliegend, daß die Stabstärke auf die Stabwirkung keinen Einfluß hat.

Die gewählte Stabstärke variiert von

$$g_1 = 6 \cdot 10^{-5}$$

bis

$$g_2 = 30 \cdot 10^{-5}$$

bei

$$f_{\max} = 1 \text{ .}$$

Dies entspricht einem Absorptionsanteil zwischen ca. 0,3 % und 1 %. Bezeichnet man als Durchgriff den Zeitanteil der Regelung im Verhältnis zur Gesamtzeit, so schwankt der Durchgriff zwischen 10 % und 20 %.

Beide Anteile entsprechen realistischen Erwartungen.

Zur Veranschaulichung dieser Ergebnisse soll noch ein Beispiel angeführt werden:

Für die Stabstärke  $g = 6 \cdot 10^{-5}$  stellen die Abb. 57, 58 und 59 die Jod- und Xenonkonzentration und den Fluß dar bei optimalen Parametern nach § 20 und 21.

Den gleichen Sachverhalt für  $g = 13,8$  zeigen die Abb. 60 (Flu8), 61 (Jod) und 62 (Xenon).

Die entsprechenden Bilder sind zwar verschieden, jedoch kann auch optisch nach keinem Qualitätskriterium eine Entscheidung getroffen werden.

Daß die Berücksichtigung der Stabstärke bei der Stabpositionierung keine signifikanten Ergebnisse liefert, zeigt Abb. 63, bei der  $\Delta t \cdot g_0$  für 2 Stabstärken über die Stabposition aufgetragen ist.

Und auch die in § 19 angegebenen Entscheidungskriterien bestätigen, daß die Stabstärke irrelevant ist (Abb. 64 und 65).

Etwas ganz anderes ist es, ob z.B. aus technischen Gründen ein bestimmter Durchgriff nicht überschritten werden darf oder ob etwa eine bestimmte Stabstärke nicht überschritten werden darf (z. B. um beide Male noch Regelreserve für mögliche größere Störungen zu haben).

Diese Wahl beeinflusst die Optimierung anderer Parameter nicht.

### § 23 Ergebnisse

Das Ziel dieser Arbeit ist es, eine Strategie zu finden. Darum sind zunächst Gesetzmäßigkeiten zu suchen, um daraus Strategien zu bilden.

Nach eingehender und kritischer Durchsicht der vorhandenen Rechnungen wurde festgestellt:

- 1) Wir hatten uns auf 2 Regelstäbe (aus rechentechnischen Gründen) beschränkt. Es wird also jeder Stab eine Reaktorhälfte beeinflussen. Und somit wird auch jede Reaktorhälfte nur auf ihren Stab wirken.

Bezeichnet man mit

$$(23.1) \quad P(t) = \int_W [\phi(r, t) - \phi^*(r)] dV ,$$

wobei  $W$  die jeweils dem entsprechenden Stab zugeordnete Reaktorhälfte ist, so ergibt sich

$$(23.3) \quad P(t_1) = q \cdot P_{\max} ,$$

wobei  $t_1$  der Einschaltzeitpunkt des 1. Regelschrittes ist und  $P_{\max}$  das nächste Maximum der  $P(t)$ -Funktion der freien Schwingung. Mit dem Ergebnis liegt auch der Ort des Maximums fest. Damit entscheidet sich auch, auf welcher Seite geregelt wird.

Die Größe  $q$  ist im wesentlichen nur noch von der Stabstärke  $g_0$  abhängig

$$(23.3) \quad q = q(g_0)$$

- 2) Die Aussage (23.2) gilt auch für den Einschaltzeitpunkt des 2. Regelschrittes

$$P(t_3) = q \cdot P_{\max}$$

mit (23.3), jedoch nicht mit gleicher Güte.

- 3) Berechnet man die Funktion  $Q(t)$  für  $t > t_1$  nach dem Einfahren des 1. Stabes, so liegt das nächste Minimum von  $Q(t)$  bei nicht wieder ausgefahrenem Stab bei

$$t = t_2 .$$

Es ist zwar das Ziel dieser Regelung (siehe Funktional)  $Q(t)$  möglichst klein zu bekommen, jedoch bei wieder ausgefahrenem Stab, und es ist nicht zwangsläufig, daß die Funktion  $Q(t)$  bei eingefahrenem 1. Stab, die ja wieder eine freie und wahrscheinlich ungedämpfte Schwingung ausführt (da nur die Absorptionskurve geringfügig geändert wurde) gerade ihr Minimum dort hat, wo der Stab wieder ausgefahren wird und dann  $Q(t)$  klein wird.

- 4) Für  $t_4$  ist  $Q(t)$  schon so klein, daß es innerhalb des systematischen Rauschens liegt.

Dann entfällt auch die Prüfung, ob  $Q(t_4)$  bei eingefahrenem 2. Stab das Minimum darstellt.

Auf der Suche nach Gesetzmäßigkeiten für  $t_4$  wurde schließlich festgestellt, daß

$$P(t_4) = 0$$

ist, mit einer weiteren Nullstelle  $\hat{t}$  unmittelbar vorher.

Es lag nahe, mit diesen Ergebnissen eine Strategie zu versuchen.

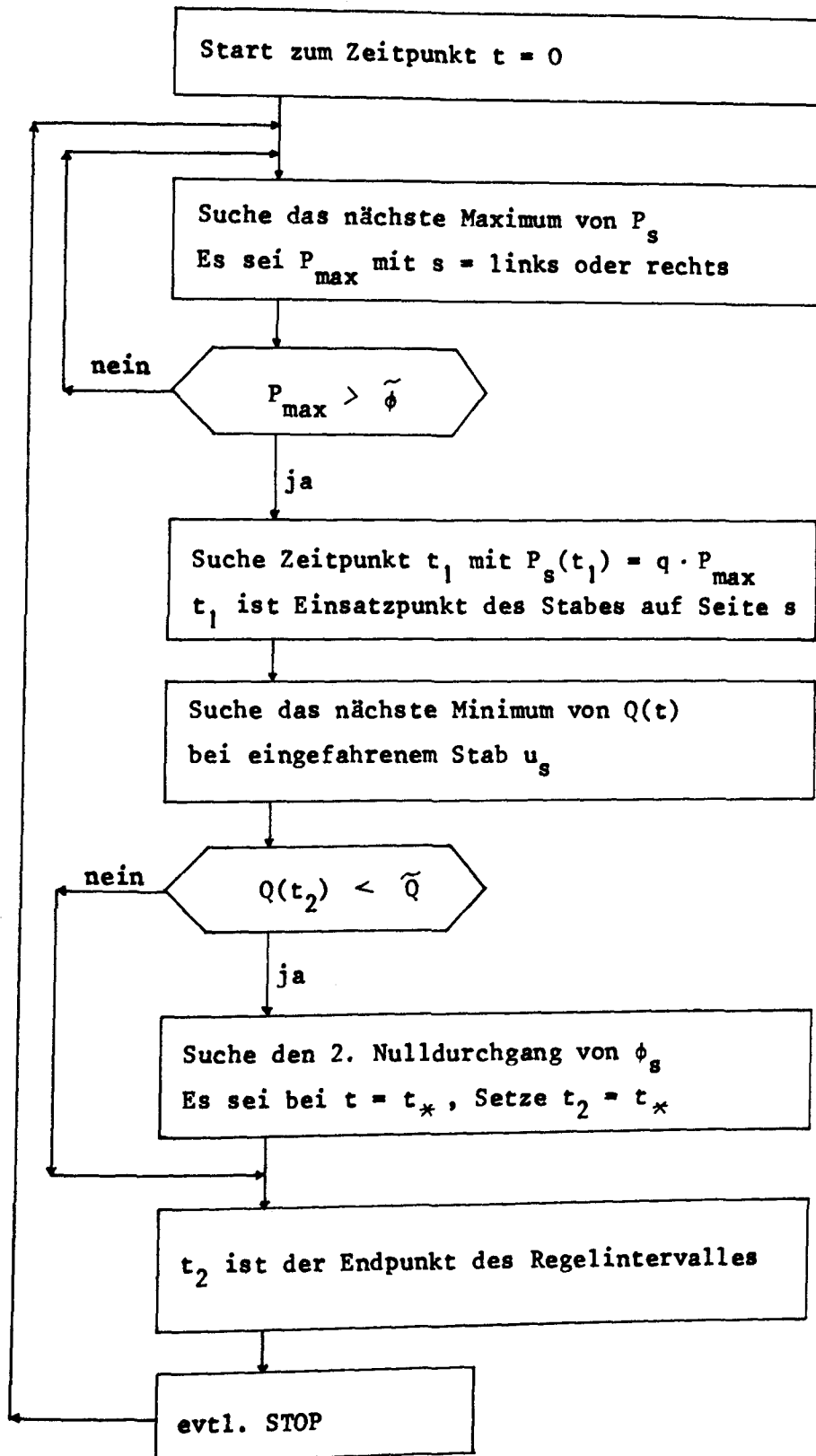
Es bedeuten:  $s$  die linke oder rechte Reaktorhälfte

$$P_s = \int_{V_s} (\phi - \phi^*) dV$$

$$Q = \int_V W dV$$

$\tilde{\phi}$  : Grenzwert unterhalb dessen keine Regelung vorgenommen wird

$\tilde{Q}$  : Grenzwert für  $Q(t)$  .



Diese Strategie brachte keine zufriedenstellenden Ergebnisse.

Aus der Tatsache, daß die Abhängigkeit des 1. Regelschrittes am besten war, kann geschlossen werden, daß  $q$  auch noch von den Anfangswerten abhängt.

Diese Abhängigkeit aber kann nicht groß sein, denn die mit dieser Strategie berechneten Zeitpunkte lagen in der Nähe der optimalen Zeitpunkte.

Jedoch genügt diese kleine Abweichung, um die Strategie nicht das Maximum von  $Q(t)$  erreichen zu lassen.

Die Entscheidung für  $t_4$  wurde nie erreicht.

Die Ursache für diese große Sensitivität des Verfahrens liegt vermutlich in der aus dem Grundrauschen herrührenden Störung.

Diese Strategie liefert jedoch hervorragende Anfangswerte für das Optimierungsverfahren, das hiermit stark gekürzt werden kann, weil viele Suchschritte entfallen.

Eine Strategie, die suboptimal ist, die also die gleichen Ziele erreicht wie die optimale, wurde dann doch noch gefunden und zwar unter Verwendung der Splineinterpolation (§ 24).

Da es jedoch nicht genügt, den Reaktor nur bei 2 Regelmaßnahmen zu untersuchen, wurden noch einige Änderungen bei der Optimierung vorgenommen.

Zuerst wurde dem Ergebnis Rechnung getragen, daß man nicht zwischen der 1. und 2. Regelmaßnahme unterscheiden kann (siehe dazu § 19).

Es wurde je Regelschritt das Funktional bestimmt. Damit entfallen auch die Zeitpunkte  $t_3$  und  $t_4$ , weiter benötigt man durch die mehrfachen Optimierungen nacheinander auch neue Zeitpunkte  $T_1$ . Da  $Q(t_2)$  schon relativ klein ist, bietet sich zunächst  $T_1 = t_2$  an.

Damit aber erhält man eine explizite Abhängigkeit des Funktionals von  $t_2$ . Um dies zu vermeiden, wurde für  $T_1$  die dem Zeitpunkt  $t_2$  folgende volle Stunde gewählt.

$$T_2 = \left[ t_2 + 1 \right] \quad \left[ \dots \right] \text{ bedeutet größtes Ganzes von } \dots$$

Die Motivierung, daß  $T_1$  so gewählt sein sollte, daß  $Q(T_1)$  gerade einen kleinen Wert von  $Q(t)$  darstellt, geht damit nicht verloren.

## § 24 Splineinterpolation

Der Ausgangspunkt dieser Überlegung war, aus einer Menge von gegebenen Punkten einen möglichst guten Kurvenverlauf zu erhalten. Wegen der bekannten Problematik der Schrittweite (siehe dazu [113]) scheidet eine Schrittweitenverfeinerung aus.

Eine Approximation ist nicht zu empfehlen, da das Fitting (die Anpassung an die gegebene Kurve) zu schlecht war.

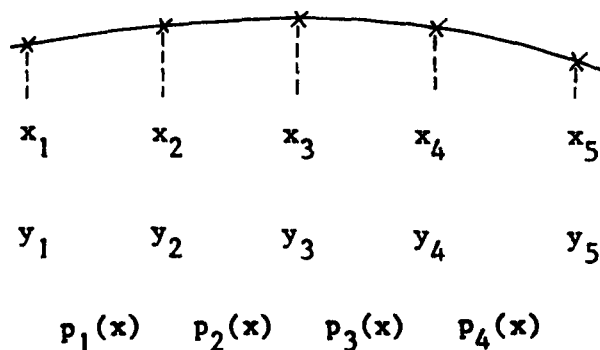
Eine große Genauigkeitssteigerung gelang mittels der Splineinterpolation [1].

Es wurde durch 5 Punkte der kubische Interpolationsspline gelegt:

Seien  $P_i(x_i, y_i)$   $i = 1, \dots, 5$  die gegebenen Punkte, wobei die Auswahl so erfolgt, daß

$$\max_i y_i = y_3$$

(denn die genaue Bestimmung des Maximums von  $Q(t)$  wird mit der Splineinterpolation ermöglicht),



so werden in jedem Intervall  $[x_i, x_{i+1}]$  kubische Polynome bestimmt

$$p_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i \quad i = 1, \dots, 4$$

mit



$$p_i(x_i) = y_i \quad i = 1, \dots, 4$$

$$p_i(x_{i+1}) = y_{i+1} \quad i = 1, \dots, 4.$$

Weiter sollen die Kurven möglichst glatt sein, d.h. in ihren Ableitungen an den Intervallenden soweit wie möglich übereinstimmen.

$$p'_i(x_{i+1}) = p'_{i+1}(x_i) \quad i = 1, 2, 3$$

$$p''_i(x_{i+1}) = p''_{i+1}(x_i) \quad i = 1, 2, 3$$

Die 3. Ableitungen sind i.a. verschieden.

Damit sind insgesamt 14 lineare Bestimmungsgleichungen für die 16 Größen  $a_i, b_i, c_i, d_i$   $i = 1, \dots, 4$  gegeben.

Es sind also 2 freie Vorgaben zu machen.

Die folgenden Vorgaben

$$p'_1(x_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$p'_4(x_4) = \frac{y_5 - y_4}{x_5 - x_4}$$

oder

$$p''_1(x_1) = 0$$

$$p''_4(x_4) = 0$$

- insbesondere die letzteren - sind der Wirklichkeit gut angepaßt.

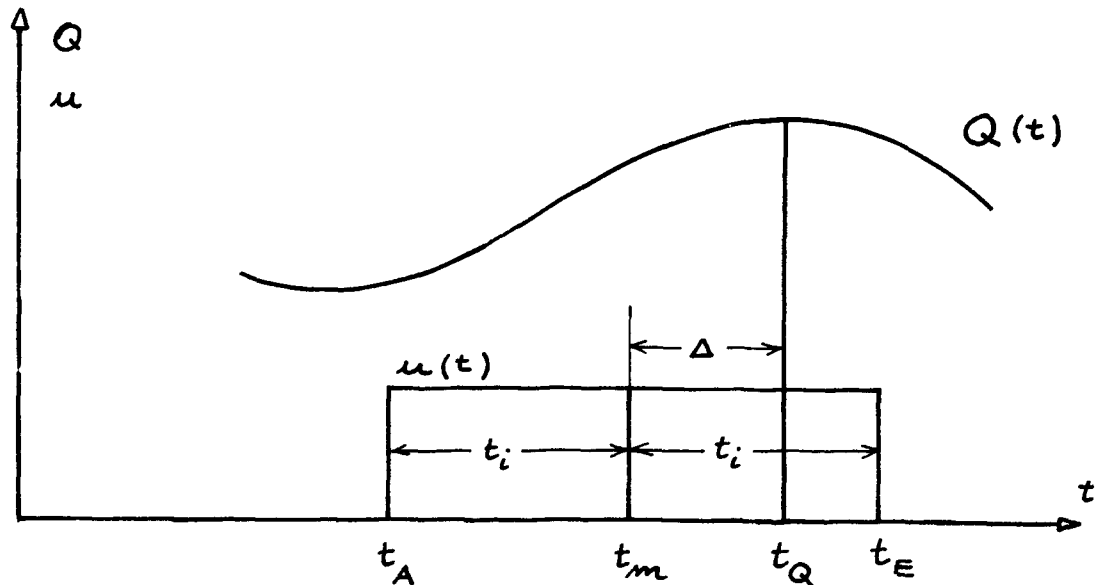
Denn die Splineinterpolation wird nur auf  $Q(t)$  angewendet. Und  $Q(t)$  besitzt eine Periode von ca. 11 Std. Dann sind also die Wendepunkte ca. 5,5 Std. voneinander entfernt.

Darüber hinaus existiert im ZAM ein Bibliotheksprogramm zur Berechnung kubischer Splines mit den Vorgaben der verschwindenden zweiten Ableitung an den Rändern.

Sehr einfach sind dann die Koordinaten des Maximums von  $Q(t)$ :  $(t_Q, Q_{\max})$  zu bestimmen.

### § 25 Anwendung der Spline-Interpolation

Zur Beschreibung des Regelintervalles dienen im folgenden die Größen  $t_A, t_E, \Delta$  und  $t_i$ .



Dabei bedeuten

$t_A$       Anfangszeitpunkt der Regelung

$t_E$       Endzeitpunkt der Regelung

$Q$        $Q$ -Funktion der freien Schwingung, d.h. ohne die Regelung im Intervall  $(t_A, t_E)$ , jedoch unter Berücksichtigung der früheren Regelung

$$t_i = \frac{t_E - t_A}{2}$$

$$t_m = \frac{t_E + t_A}{2}$$

$(t_Q, Q_{\max})$  Koordinaten des folgenden Maximums der  $Q$ -Funktion

$$\Delta = t_Q - t_m$$

Gesucht werden also charakteristische Größen, die eine Strategie ermöglichen. Es ist naheliegend, besonders  $Q(t)$  zu untersuchen, da die Zielfunktion aus  $Q(t)$  berechnet wird.

Es wurde auch versucht, Gesetzmäßigkeiten bei anderen Größen zu finden, allerdings ohne Erfolg.

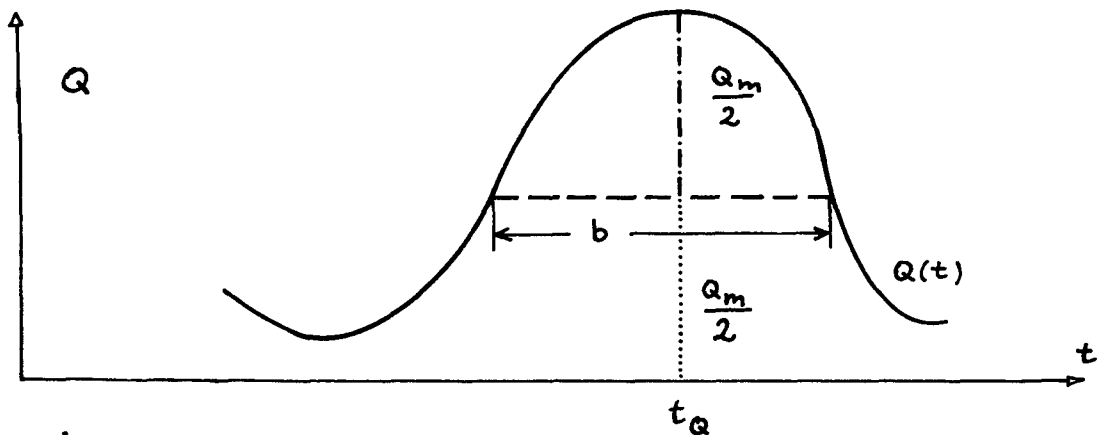
Die funktionale Abhängigkeit von  $Q(t)$  werde mit  $f(Q)$  bezeichnet.

Dann wurden besonders untersucht:

$$(25.1) \quad f(Q) = Q_{\max}$$

$$(25.2) \quad f(Q) = Q_{\max} \cdot b \quad ,$$

wobei  $b$  die Halbwertsbreite ist (siehe Bild)

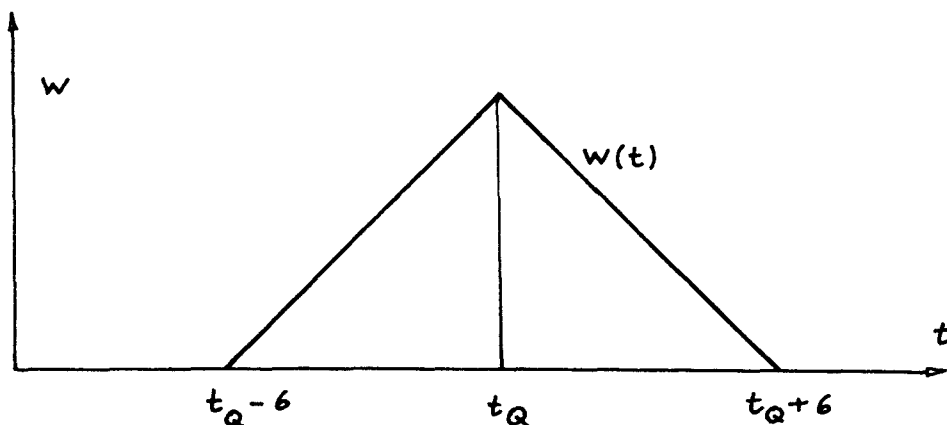


und

$$(25.3) \quad f(Q) = \int Q(t) w(t) dt,$$

wobei  $w(t)$  eine Gewichtungsfunktion ist, die aus dem  $Q$ -Verlauf einen um  $t_Q$  liegenden Teil herauschneidet.

Es wurde z.B. verwendet



Die besten Ergebnisse erhielten wir für (25.1). Zur Bestimmung von  $(t_Q, Q_m)$  wurde die Splineinterpolation verwendet.

Aus den aufgetragenen Werten  $\Delta(Q_m)$  und  $t_i(Q_m)$  erkennt man:

Es ist

$$(25.4) \quad \Delta = \Delta(Q_m) = a_1 Q_m + b_1$$

sehr genau erfüllt. Die Abb. 67 zeigt dies für einen untersuchten Fall. Ebenso ergab sich als beste Approximation

$$(25.5) \quad t_i = t_i(Q_m) = a_2 Q_m + b_2,$$

obgleich diese Approximation nicht die gleiche Güte wie (25.4) aufweist (siehe Abb. 68).

Dies ist aber verständlich, denn für den Grenzübergang

$$Q_m \longrightarrow 0$$

ergibt sich der optimale Zustand, also

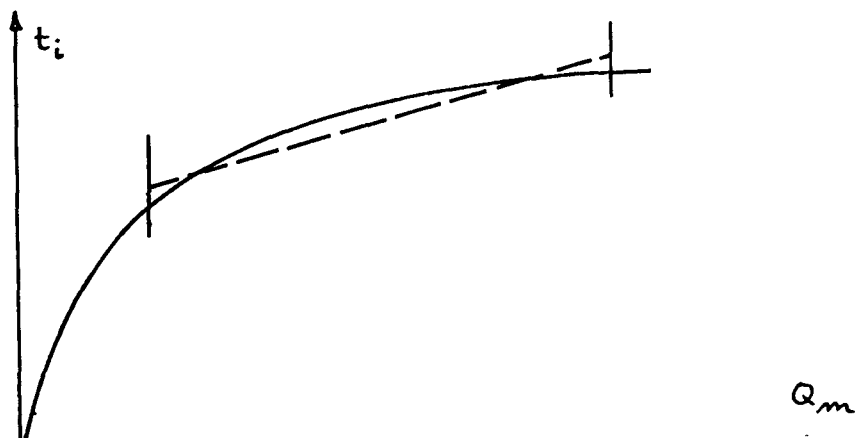
$$t_i = 0 \quad (\text{nicht aber } \Delta=0)$$

Das bedeutet, daß  $t_i = t_i(Q_m)$  eine Kurve durch den Ursprung sein muß.

Wegen  $b_2 \neq 0$  bedeutet dies, daß

$$t_i = a_2 Q_m + b_2$$

zwar eine gute, aber nur eine lokale Näherung ist (siehe unten) .



Die Ergebnisse (25.4) und (25.5) gelten für konstante Stabstärke.

Die Untersuchung der Abhängigkeit von  $\Delta$  und  $t_i$  von  $g_0$  ergab, daß

$$(25.6) \quad a_1, b_1 \text{ und } b_2 \\ \text{von der Stabstärke wenig abhängen}$$

und daß

$$(25.7) \quad a_2 \sim \frac{1}{g_0}$$

gilt.

Es muß aber erwähnt werden, daß das vorhandene Zahlenmaterial gering ist und daß (25.6) und (25.7) nur für  $9 \cdot 10^{-5} \leq g_0 \leq 17 \cdot 10^{-5}$  untersucht worden ist.

Andrerseits ist die Kenntnis der  $g_0$ -Abhängigkeit nicht notwendig, denn eine für feste Stabstärke durchgeführte Rechnung zur Bestimmung der Konstanten  $a_1, b_1, a_2, b_2$  wird eine bessere Strategie ergeben, als die Bestimmung der Konstanten  $a_1, b_1, a_2, b_2$  aus z. B. einer Approximation für andere Stabstärken.

## § 26 Strategie zur Bestimmung des Optimums

Das Ziel dieser Untersuchung war es, eine suboptimale <sup>x)</sup> Strategie zu finden, die das aufwendige Optimierungsverfahren aus § 15 und ebenso ein Gradientenverfahren vermeidet, dessen numerischer Aufwand quadratisch mit der Anzahl der Variablen wächst.

Dieses Ziel wurde erreicht mit den Ergebnissen (25.4) und (25.5)

$$\begin{aligned} \Delta &= a_1 \cdot Q_m + b_1 \\ (26.1) \quad t_i &= a_2 \cdot Q_m + b_2 \end{aligned}$$

Aus Vorabrechnungen werden Tripel  $(Q_m, \Delta, t_i)$  gewonnen und aus diesen Punkten  $a_j, b_j$  ( $j = 1, 2$ ) mittels Gaußapproximation berechnet.

Für  $g_0 = 11 \cdot 10^{-5}$  haben wir

$$a_1 = 1,436$$

$$b_1 = 3,373$$

$$a_2 = 3,116$$

$$b_2 = 0,1886$$

erhalten.

Um mit dieser Strategie zu regeln, benötigt man nur noch den maximalen Q-Wert der jeweils freien Schwingung.

Zur Bestimmung einer suboptimalen Regelung benötigt man also weniger als den doppelten Aufwand, der zur Berechnung von Xenonschwingungen (ohne Regelung) erforderlich ist.

---

x) Mit suboptimal bezeichnet man dabei eine Strategie, von der nicht bewiesen wurde, daß sie optimal ist, die aber alle Anforderungen der Optimalität mit hinreichend guter Näherung erfüllt.

Diese Strategie nach (26.1) ist nicht nur, wie die Ergebnisse aus § 23, ein guter Näherungswert der optimalen Regelung, sondern die Strategie ermöglicht auch - im Gegensatz zu § 23 - eine starke Dämpfung der Schwingung.

Damit erfüllt diese Strategie das gewünschte Ziel.

An dem Beispiel eines Plattenreaktors mit 2 Stäben sollen die sehr zufriedenstellenden Ergebnisse demonstriert werden.

Die Abb. 69-78 erläutern die optimale Regelung mit  $\tau = 11$  Std. Es wurde eine Regelung ab  $t = 26$  Std. zugelassen und ab  $T_1 = 55$  Std. gemessen. Danach wurde  $t = 75$  Std. wieder geregelt und ab  $T_1 = 100$  Std. gemessen.

Die Abb. 69 und 70 zeigen den Jodverlauf, die Abb. 71 und 72 den Xenonverlauf, Abb. 73 und 74 den Neutronenfluß und Abb. 75 und 76 die Regelung.

Die Zeiten sind jeweils eingetragen. Man beachte, daß sich die Bilder für ca. 20 Std. überlappen. Es wird immer nur die Abweichung vom stationären Verlauf gezeichnet.

In Abb. 77 sind die vermutlich extremsten Auslenkungen ausgewählt und zwar  $\phi_5(t)$  und  $\phi_{27}(t)$ , d.h. das zeitliche Verhalten des Flusses an den Stellen  $x_i = 100$  cm und  $x_i = 540$  cm.

Die Abb. 78 gibt den  $Q(t)$  Verlauf bis  $t = 120$  Std. wieder.

Den gleichen Fall wie eben, jedoch mit der Strategie (26.1) geregelt, zeigen die Abb. 79-88.

Die Reihenfolge der Abb. ist die gleiche wie oben.

Um eine bessere Vorstellung zu haben, sind in Abb. 89 und 90 noch  $Q(t)$ ,  $\phi_5(t)$  und  $\phi_{27}(t)$  der freien Schwingung aufgetragen.

Drei Ergebnisse sind festzuhalten:



- 1) Die Strategie (26.1) erfüllt das Ziel anschaulich besser als die 2-malige Optimierung, da sie ein kleineres Maximum der Flußabweichung liefert.
- 2) Zwar ist der Fluß noch sehr unruhig, doch ist zu beachten, daß durch die sprunghaften Absorptionsänderungen durch Fahren der Stäbe sich auch der Fluß sprunghaft (diesmal im Sinne des Xenonzeitmaßstabes) ändern wird.
- 3) Mittelt man die Sprünge

$$\phi = \frac{\phi^+ + \phi^-}{2},$$

so erkennt man, daß die neuen Werte  $\phi$  sehr viel mehr geglättet sind.

Mit fester Stabstärke und Bang-bang-Regelung sind Flußsprünge unvermeidlich. Dann kann nur noch die Bandbreite minimiert werden.

Eine Verringerung der Regelabsorption und damit eine Glättung des Flusses, weil die Sprünge verkleinert werden, ist nicht unbedingt die technisch bessere Lösung, da eine Mindestabsorption vorhanden sein muß, um Regelbarkeit zu garantieren.

Naheliegend ist jedoch die Möglichkeit, Stäbe mit verschiedenen Stärken zu haben.

Um dies zu demonstrieren, haben wir das gleiche Beispiel noch einmal gerechnet, nun aber nach der 2. Regelung die Stabstärke halbiert, gewissermaßen also die Stäbe durch Stäbe halber Konzentration ersetzt.

Wenn die Strategie nun mit

$$a_1 = -1,436$$

$$b_1 = 4,373$$

$$a_2 = 6,235$$

$$b_2 = 0,1886 \quad x)$$

durchgeführt wird, so ergeben sich für  $x = 100$  cm und  $x = 540$  cm (wie vorher auch) die in Abb. 91 gezeigten Flußkurven und ein  $Q(t)$  nach Abb. 92.

Die Flußsprünge sind kleiner geworden; aber der Durchgriff ist von 8 % auf 16,7 % angewachsen.

Da die Bandbreite des Flußverlaufes auch die Bandbreite der Flußsprünge ist, ist die Regelung nicht verbesserbar, also ist es berechtigt, sie optimal zu nennen in dem eben definierten Sinne.

Bezeichnet man mit  $B_s$  die Sprungbandbreite

$$B_s = \max_{r,t} (\phi^+ - \phi^-)$$

und mit  $B_\phi$  die Bandbreite des gestörten Flusses

$$B_\phi = \max_{r,t} (\phi - N) - \min_{r,t} (\phi - N),$$

so ist der Bandbreitenfaktor  $f$

$$f = \frac{B_\phi}{B_s}.$$

Wegen  $f \geq 1$  ist das Optimum bei  $f = 1$ .

---

x)  $g_0 = 5,5$  liegt außerhalb des untersuchten Bereiches für die  $a_i, b_i$ . Wir haben  $a_1, a_2$  und  $b_2$  nach (25.6) (25.7) bestimmt und  $b_1$  mit geringstem Aufwand optimiert. Die obigen Ergebnisse beweisen jedoch, daß der gefundene Funktionswert  $b_1(g_0)$  für  $g_0 = 5,5$  sehr genau sein muß.

Damit ist bei fester Stabstärke  $f$  eine Güteangabe für die Regelungsstrategie.

Diese neue Definition ermöglicht den Übergang auf umfangreichere Anwendungen, auf Probleme also, bei denen nicht optimierte Regelungen berechnet, sondern nur noch Strategien untersucht werden können.

## § 27 Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird zuerst ein Verfahren angegeben zur Bestimmung der optimalen Regelung von Xenonschwingungen für einen eindimensionalen Reaktor unter der Voraussetzung örtlich kontinuierlicher Regelung, wobei unter optimal zu verstehen ist, daß eine gewichtete Summe aus Fluß und Regelabsorption minimal wird.

Die Gewichtsfunktionen können dabei so gewählt werden, daß die einzelnen Summanden Reaktionsraten darstellen. Dabei ergibt sich, daß der stationäre Zustand bzw. das rasche Erreichen des stationären Zustandes eine gute Näherung des obigen Optimums ist.

Bei diesem Verfahren stößt die Darstellung von Regelstäben auf Schwierigkeiten.

Bei Verwendung der Endwertregelung kann diese Schwierigkeit vermieden werden. Von Endwertregelung spricht man, wenn man den stationären Zustand in minimaler Zeit erreicht. Sie führt zu einer Bang-bang-Regelung.

Bei begrenzter Anzahl von Regelstäben wird jedoch der stationäre Zustand nur asymptotisch erreicht. Führt man eine neue Zielfunktion ein, in der Jod und Xenon gewichtet werden, so kann gezeigt werden, daß die Bang-bang-Eigenschaft nicht verloren geht.

Für diese Bang-bang-Regelung wird ein iteratives Verfahren zur Bestimmung des Optimums angegeben.

Am Beispiel des Plattenreaktors werden sodann Untersuchungen über optimales Stabfahren und über den Einfluß der Stabstärke und der Stabpositionierung durchgeführt.

Eine große Genauigkeitsverbesserung bei gleichbleibender Schrittweite wurde durch die Spline-Interpolation erreicht. Damit kann eine einfache Strategie angegeben werden, die der berechneten optimalen Regelung sehr nahe kommt, zu deren Bestimmung man jedoch nur den Verlauf der freien Schwingung benötigt.

Sollten sich diese Ergebnisse in erweiterten Untersuchungen (insbesondere bei mehr Dimensionen) bestätigen, so wäre ein Verfahren gefunden, um ein optimales Stabfahren mithilfe bisher schon in der Reaktortechnik angewandten Rechenmethoden zu ermitteln.

## A n h a n g

Die Berechnung der optimalen Regelung mit Hilfe der

Variationsrechnung bei Vorgabe der Stäbe

Hier wird für die optimale Regelung mit integralem Kriterium eine unabhängige Herleitung gegeben. Gleichzeitig wird gezeigt, wie das Gleichungssystem sich für mehrere Regelstäbe ändert.

Ausgangspunkt ist wieder das Gleichungssystem (11.2)

$$0 = D\Delta\phi + (\nu F - \Sigma - \sigma X)\phi - u\phi$$

$$(A1) \quad \dot{I} = y_i F\phi - c_i I$$

$$\dot{X} = y_x F\phi + c_i I - c_x X - \sigma X\phi$$

mit den bekannten Rand- und Anfangswerten (3.3) (3.4).

Es sei nun das Funktional (3.5)

$$(A2) \quad J = \int_V \int_0^T \left[ (\phi - N)^2 + k^2 u^2 \right] dV dt$$

zu minimieren unter der Bedingung, daß die Regelung  $u(r, t)$  sich zusammensetzt aus  $M$  verschiedenen Regionen (Stäben)  $R_j$  mit den charakteristischen Funktionen  $h(r)$

$$(A3) \quad h_j(r) = \begin{cases} 1 & \text{für } r \in R_j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Da die  $R_j$  disjunkt sind, gilt

$$(A4) \quad h_j \cdot h_k = 0 \quad \text{falls } j \neq k.$$

Das Zeitverhalten jedes Regelstabes sei  $a_j(t)$ .

Insgesamt ergibt sich also

$$(A5) \quad u(r, t) = \sum_{j=1}^M a_j(t) \cdot h_j(r).$$

Gesucht sind also die M Funktionen  $a_j(t)$   $j = 1, \dots, M$ .

Ihre Gleichungen sollen jedoch ohne das Hamilton-Prinzip, aber mittels der Variationsrechnung gewonnen werden.

Erweitern wir das Funktional wieder um die Nebenbedingungen, so folgt (Argumente sind weggelassen)

$$(A6) \quad J = \int_0^T \int_V \left\{ -(\phi - N)^2 - k^2 \left( \sum_{j=1}^M a_j h_j \right)^2 \right. \\ \left. + w_1 \left[ D\Delta\phi + (vF - \Sigma - \sigma X)\phi - \phi \cdot \sum_{j=1}^M a_j h_j \right] \right. \\ \left. + w_2 \left[ y_i F\phi - c_i I - \dot{I} \right] \right. \\ \left. + w_3 \left[ y_x F\phi + c_i I - c_x X - \sigma X\sigma - \dot{X} \right] \right\} dV dt .$$

Wegen (A4) kann in (A6)

$$\left( \sum_{j=1}^M a_j h_j \right)^2 \text{ durch } \sum_{j=1}^M (a_j h_j)^2$$

ersetzt werden.

Nun soll J maximal sein bezüglich der  $a_j(t)$

$$\delta J = \frac{\delta J}{\delta a_j} \delta a_j = 0 \quad j = 1, \dots, M ,$$

also

$$\int_0^T \int_V \left[ -k^2 2 a_j h_j^2 \delta a_j - w_1 \phi h_j \delta a_j \right] dV dt = 0 \quad \text{für } j = 1, \dots, M .$$

Daraus folgt nach dem Fundamentallemma der Variationsrechnung

$$\int_V \left[ 2k^2 a_j h_j^2 + w_1 \phi h_j \right] dV = 0$$

oder



$$(A8) \quad a_j(t) = - \frac{\int_V w_1 \phi h_j dV}{2k^2 \int_V h_j^2 dV} .$$

(A8) in (A6) eingesetzt, ergibt

$$(A9) \quad J_0 = \int_0^T \int_V \left\{ -(\phi - N)^2 - k^2 \cdot \sum_{j=1}^M h_j^2 \left[ \frac{\int_V w_1 \phi h_j dV}{2k^2 \int_V h_j^2 dV} \right]^2 \right. \\ \left. + w_1 \left[ D\Delta\phi + (vF - \Sigma - \sigma X)\phi + \phi \sum_{j=1}^M \frac{h_j \int_V w_1 \phi h_j dV}{2k^2 \int_V h_j^2 dV} \right] \right. \\ \left. + w_2 \left[ y_i F\phi - c_i I - \dot{I} \right] \right. \\ \left. + w_3 \left[ y_x F\phi + c_i I - c_x X - \sigma X\phi - \dot{X} \right] \right\} dV dt .$$

$J_0$  ist minimal bzgl.  $\phi, I$  und  $X$ , also erhält man durch Variation die Bestimmung für  $w_1, w_2$  und  $w_3$

$$\frac{\delta J_0}{\delta \phi} \delta \phi = 0$$

$$\frac{\delta J_0}{\delta I} \delta I = 0$$

$$\frac{\delta J_0}{\delta X} \delta X = 0 .$$

Es ist

$$\frac{\delta J_0}{\delta \phi} \delta \phi = \int_V dV \int_0^T dt \left\{ -2(\phi - N) - k^2 \sum_{j=1}^M \frac{h_j^2 \int_V w_1 \phi h_j dV \int_V w_1 \delta \phi h_j dV}{(2k^2 \int_V h_j^2 dV)^2} \right. \\ \left. + w_1 \left[ D\Delta\delta\phi + (vF - \Sigma - \sigma X)\delta\phi \right] + w_1 \delta\phi \sum_{j=1}^M \frac{h_j \int_V w_1 \phi h_j dV}{2k^2 \int_V h_j^2 dV} \right. \\ \left. + w_1 \phi \sum_{j=1}^M \frac{h_j \int_V w_1 \delta \phi h_j dV}{2k^2 \int_V h_j^2 dV} \right\}$$

$$+w_2 y_i F \delta \phi + w_3 (y_x F \delta \phi - \sigma X \delta \phi) \} .$$

Durch Umschreiben der einzelnen Terme erhält man

$$\begin{aligned}
 (A10) \quad \frac{\delta J_o}{\delta \phi} \delta \phi = & - \int_0^T dt \int_V dV \{ 2(\phi - N) \} \\
 & - \int_0^T dt \sum_{j=1}^M \frac{2k^2 \int_V h_j^2 dV \cdot \int_V w_1 \phi h_j dV \cdot \int_V w_1 h_j \delta \phi dV}{2k^2 \cdot \left( \int_V h_j^2 dV \right) 2k^2 \cdot \int_V h_j^2 dV} \\
 & + D \int_0^T dt \int_V dV (w_1 \Delta \delta \phi) \\
 & + \int_V dV \int_0^T dt w_1 \cdot (\nu F - \Sigma - \sigma X) \delta \phi \\
 & + 2 \int_0^T dt \sum_{j=1}^M \frac{\int_V w_1 \phi h_j dV \cdot \int_V w_1 h_j \delta \phi dV}{2k^2 \int_V h_j^2 dV} \\
 & + \int_0^T dt \int_V dV \left[ w_2 y_i F + w_3 y_x F - w_3 \sigma X \right] \delta \phi .
 \end{aligned}$$

Durch partielle Integration unter Berücksichtigung der Randbedingungen zeigt man leicht

$$(A11) \quad \int_V dV w_1 \Delta \delta \phi = \int_V dV \Delta w_1 \delta \phi .$$

(A11) in (A10) eingesetzt, ergibt mit der Abkürzung

$$(A12) \quad H_j = \frac{1}{2k^2 \int_V h_j^2 dV}$$

insgesamt

$$\begin{aligned}
\frac{\delta J_0}{\delta \phi} \delta \phi = & \int_V dV \int_0^T dt \left\{ -2(\phi - N) - \sum_{j=1}^M H_j \left[ \int_V w_1 \phi h_j dV \right] w_1 h_j \right. \\
& + D\Delta w_1 + w_1 (\nu F - \Sigma - \sigma X) + \sum_{j=1}^M H_j \left[ 2 \int_V w_1 \phi h_j dV \right] w_1 h_j \\
& \left. + \sum_{j=1}^M H_j \left[ \int_V w_1 h_j dV \right] w_1 h_j + w_2 y_i F + w_3 y_x F - w_3 \sigma X \right\} \delta \phi .
\end{aligned}$$

Und wieder nach dem Fundamentallemma:

$$\begin{aligned}
(A13) \quad & -D\Delta w_1 - (\nu F - \Sigma - \sigma X) w_1 + 2\phi - \sum_{j=1}^M w_1 h_j H_j \int_V w_1 \phi h_j dV \\
& - 2N - w_2 y_i F - w_3 y_x F + w_3 \sigma X = 0.
\end{aligned}$$

Benutzt man weiter die durch partielle Integration unter Berücksichtigung der Anfangswerte leicht zu beweisenden Beziehungen

$$\begin{aligned}
\int_0^T dt w_2 \delta \dot{I} &= - \int_0^T dt \delta I \dot{w}_2 \\
\int_0^T dt w_3 \delta \dot{I} &= - \int_0^T dt \delta X \dot{w}_3,
\end{aligned}$$

sofern man noch die "natürlichen" Endwerte

$$w_2(r, T) = 0$$

$$w_3(r, T) = 0$$

annimmt, so erhält man

$$\frac{\delta J_0}{\delta I} \delta I = 0 = \int_V dV \int_0^T dt \left\{ w_2 c_i - \dot{w}_2 - w_3 c_i \right\} \delta I$$

$$\frac{\delta J_0}{\delta X} \delta X = 0 = \int_V dV \int_0^T dt \left\{ \dot{w}_1 \sigma \phi + w_3 c_x + w_3 \sigma \phi - \dot{w}_3 \right\} \delta X$$

und damit wie vorher

$$(A14) \quad \dot{w}_2 = c_i w_2 - c_i w_3$$

$$(A15) \quad \dot{w}_3 = w_1 \sigma \phi + (c_x + \sigma \phi) w_3.$$

Zum Schluß erhält man aus  $\psi = -w_1$  und

$$\frac{\delta J_0}{\delta u_1} \delta u_1 = \frac{\delta J_0}{\delta u_2} \delta u_2 = \frac{\delta J_0}{\delta u_3} \delta u_3 = 0$$

das Gleichungssystem

$$(A16) \quad \begin{aligned} 0 = & D\Delta\phi + (vF - \Sigma - \sigma X)\phi - \phi \sum_{j=1}^M h_j H_j \int_V \phi \psi h_j dV \\ 0 = & D\Delta\psi + (vF - \Sigma - \sigma X)\psi - \psi \sum_{j=1}^M h_j H_j \int_V \phi \psi h_j dV \\ & + 2\phi - 2N - w_2 y_i F - w_3 y_x F + \sigma X w_3, \end{aligned}$$

$$(A17) \quad \begin{aligned} \dot{I} &= y_i F \phi - c_i I \\ \dot{X} &= y_x F \phi + c_i I - c_x X - \sigma X \phi, \end{aligned}$$

$$(A18) \quad \begin{aligned} \dot{w}_2 &= c_i w_2 - c_i w_3 \\ \dot{w}_3 &= -\sigma \phi \psi + (c_x + \sigma \phi) w_3 \end{aligned}$$

bei den bekannten Anfangs-, End- und Randwerten.

Und für das Funktional (4.2)

$$- \int_0^T \int_V \left[ F^2 (\phi - N)^2 + k^2 \phi^2 u^2 \right] dV dF = \text{Min}$$

erhält man nach ähnlicher (aber längerer) Rechnung anstelle von (A16)

$$\begin{aligned}
 (A19) \quad 0 &= D\Delta\phi + (vF - \Sigma - \sigma X)\phi - \phi \sum_{j=1}^M \frac{h_j}{2k^2} \frac{\int_V \phi \psi h_j dV}{\int_V \phi^2 h_j^2 dV} \\
 0 &= D\Delta\psi + (vF - \Sigma - \sigma X)\phi + \phi \sum_{j=1}^M \frac{h_j^2}{2k^2} \left[ \frac{\int_V \phi \psi h_j dV}{\int_V \phi^2 h_j^2 dV} \right]^2 \\
 &\quad - \psi \sum_{j=1}^M \frac{h_j}{2k^2} \left[ \frac{\int_V \phi \psi h_j dV}{\int_V \phi^2 h_j^2 dV} \right]
 \end{aligned}$$

$$-2F^2_N - w_2 y_i F - w_3 y_x F + w_3 \sigma X$$

bei unveränderten Gleichungen (A17) und (A18).

Für  $M = 1$  geht (A16) in die bekannte Gleichung (10.3) über.

## Literaturverzeichnis

- [1] AHLBERG, J.H., NILSON E.N., WALSH, J.  
The Theory of Splines and their Applications  
Academic Press, New York, 1967
- [2] AKCASU, Z., LELLOUCHE, G.S., SHOTKIN, L.M.  
Math. Methods in Nucl. Reactor Dynamics  
Academic Press, New York, 1971
- [3] AOKI, M.  
Introduction to Optimization Techniques Fundamental and  
Applications of Nonlinear Programming  
The Macmillan Comp. New York, 1971
- [4] ASH, M.  
Optimal Shutdown Control of Nuclear Reactors  
Academic Press, New York, 1966
- [5] AUERBACH, T., MENNIG, J., GUJER, E.  
Semianalytische Lösung des orts- und zeitabhängigen nicht-  
linearen Xenonproblems  
EIR-164, Würenlingen, 1969
- [6] AXELBAND, E.I.  
Optimal Control of Linear Distributed Parameter Systems  
Adv. in Contr. Systems 7, 257-310 (1969)
- [7] BALAKRISHNAN, A.V.  
Techniques of Optimization  
Academic Press, New York, 1972
- [8] BALLENSIEFEN, G.  
Zum Problem der räumlichen Xenonschwingungen in zylindrischen  
Reaktoren mit Anwendung auf die 300 MW<sub>el</sub>-THTR-Anlage  
KFA-IRG-67-9, 1967
- [9] BARBASHIN, E.A.  
Introduction to the Theory of Stability  
Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1970

- [10] BAUER, D.C.  
Practical Control Procedures for Xenon Spatial Oscillations  
Diss. Carnegie Mellon Univ., Pittsburgh, Penn., 1972
- [11] BAUER, D.C., PONCELET, C.G.  
Practical Xenon Spatial Control  
Nucl. Techn. 21, 165-189 (1974)
- [12] BAUER, H., NEUMANN, K.  
Berechnung optimaler Steuerungen, Maximumprinzip und  
dynamische Optimierung  
Springer, Berlin, 1969
- [13] BELL, G.I., GLASSTONE, S.  
Nuclear Reactor Theory  
van Nostrand, Princeton, New York, 1970
- [14] BELLMAN, R.  
Dynamische Programmierung und selbstanpassende Regelprozesse  
Oldenbourg, München, 1967
- [15] BELLMAN, R.E., KALABA, R.E.  
Quasilinearisation and Nonlinear Boundary-Value Problems  
American Elsevier Publ. Comp., Inc., New York, 1965
- [16] BIRKHOFF, G., WIGNER, E.P. (ed.)  
Nuclear Reactor Theory  
Proceedings of Symposia in Applied Mathematics XI  
Am. Math. Soc., 1961
- [17] BOCK, H.-W.  
Ein analoges Diffusionsmodell für große Druckwasserreaktoren  
zur Untersuchung zeitabhängiger Probleme der Leistungsdichte-  
verteilung  
Diss. TU Braunschweig, 1973
- [18] BOHL, E.  
Die Theorie einer Klasse linearer Operatoren und Existenz-  
sätze für Lösungen nichtlinearer Probleme in halbgeordneten



Banachräumen

Arch. Rat. Mech. Anal. 15, 263-288 (1964)

- [19] BROGAN, W.L.  
Optimal Control Theory Applied to Systems Described by Partial  
Differential Equations  
Adv. in Contr. Systems 6, 221-316, 1968
- [20] BUSLIK, A.J., WEINREICH, W.A.  
Variational Calculation of Complex Modes of Xenon Spatial  
Oscillations  
Trans. Am. Nucl. Soc. 10, 257-258, 1967
- [21] BUTKOVSKI, A.G.  
Distributed Control Systems  
American Elsevier Publ. Comp., New York, 1969
- [22] BUTKOVSKI, A.G.  
Optimum Processes in Systems with Distributed Parameters  
Automation and Remote Control 22, 13-21 (1961)
- [23] BUTKOVSKI, A.G.  
The Maximum Principle for Optimum Systems with Distributed  
Parameters  
Automation and Remote Control 22, 1156-1169 (1961)
- [24] BUTKOVSKI, A.G., LERNER, A.Y.  
The Optimal Control of Systems with Distributed Parameters  
Automation and Remote Control 21, 682-691 (1960)
- [25] BUTKOVSKI, A.G.  
The Broadened Principle of the Maximum for Optimal Control  
Problems  
Automation and Remote Control 24, 292-304 (1963)
- [26] CANON, M.D., CULLUM, C.D., POLAK, E.  
Theory of Optimal Control and Mathematical Programming  
McGraw-Hill, New York, 1970

- [27] CANOSA, J.M.  
Studies in Nuclear Reactor Dynamics  
Diss. Harvard Univ., Cambridge (Mass), 1964
- [28] CANOSA, J.  
Expansion Method for Nonlinear Boundary-Value Problems  
J. Math. Phys. 8, 2180-2183 (1967)
- [29] CANOSA, J., BROOKS, H.  
Xenon-Induced Oscillations  
NSE 26, 237-253 (1966)
- [30] CHERNIK, J.  
The Dynamics of a Xenon-Controlled Reactor  
NSE 8, 233-243 (1960)
- [31] CHRISTIE, A.M., PONCELET, C.G.  
On the Control of Spatial Xenon Oscillations  
NSE 51, 10-24 (1973)
- [32] COHEN, D.S.  
Positive Solutions of Nonlinear Eigenvalue Problems:  
Application to Nonlinear Reactor Dynamics  
Arch. Rat. Mech. Anal. 26, 305-315 (1967)
- [33] CORCORAN, W.R., HUMPHRIES, J.R., LITKE, H.J., LEBLANC, J.D.  
Damping of Xenon Oscillations in the Maine Yankee Reactor  
Nucl. Technology 22, 252-262 (1974)
- [34] CORRAN, E., STAPLETON, C.A.  
Simulation Studies of a Practical Reactor Control System  
Providing Time-Optimal Shutdown  
NSE 54, 47-54 (1974)
- [35] CRAWFORD, R.M., KASTENBERG, W.E.  
Stability Analysis of Distributed Parameter Systems in a  
Banach Space  
Int. J. Control 12, 929-943 (1970)

- [36] CRAWFORD, R.M., KASTENBERG, W.E.  
On Semigroup Theory and Its Applications to Space-Time  
Nuclear Reactor Dynamics  
NSE 47, 238-241 (1972)
- [37] CRAWFORD, R.M.  
Analytical Stability Criteria for Space Dependent Systems  
Diss. Univ. of California, Los Angeles, 1969
- [38] DOUGLAS, J.M.  
Process Dynamics and Control  
Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New York, 1972
- [39] EL-BASSIONI, A.A.  
Optimal Control of Distributed Parameter Nuclear Power  
Reactors  
Diss., Univ. of Michigan, 1969
- [40] EL-BASSIONI, A.A., PONCELET, C.G.  
On the Minimal-Time Spatial Xenon Control Problem  
Trans. Amer. Nucl. Soc. 15:No 1, 285-286 (1972)
- [41] EMENDÖRFER, D., HÖCKER, K.H.  
Theorie der Kernreaktoren I,II  
BI, Mannheim, 1969
- [42] FAN, L.T., WANG, C.S.  
Das diskrete Maximumprinzip  
Oldenbourg, München, 1969
- [43] FARLOW, S.J.  
On Finding Switching Times in Time Optimal Control Systems  
Int. J. Contr. 17, 855-861 (1973)
- [44] FINNEMANN, H.  
Kostenoptimale Regelung der Xe-Vergiftung beim zyklischen  
Teillastfahren von Leistungsreaktoren  
Atomforum 1970, 70-73 (1970)

- [45] FONSECA, G.  
Space-Time Control of Nuclear Reactor Dynamics  
Diss. Stanford, 1973
- [46] FRANK, W.  
Mathematische Grundlagen der Optimierung-Variationsrechnung,  
dynamische Programmierung, Maximumprinzip-  
Oldenbourg, München & Wien, 1969
- [47] FRIEDLY, J.C.  
Dynamic Behaviour of Processes  
Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1972
- [48] FRISCH, W.  
Stabilitätsprobleme bei dampfgekühlten schnellen Reaktoren  
Diss., Univ. Karlsruhe, 1968
- [49] FRISCH, W.  
Analogrechnen in der Kernreaktortechnik  
G. Braun, Karlsruhe, 1971
- [50] GRAHAM, J.W.  
A Hamilton-Jacobi Approach to the Optimal Control of  
Distributed Parameter Systems  
Int. J. Control 12, 479-487 (1970)
- [51] GYFTOPOULOS, E.P., DEVOOGHT, J.  
On the Range of Validity of Nonlinear Reactor Dynamics  
NSE 10, 372-376 (1961)
- [52] HANKE, W.  
Ein Beitrag zur optimalen Xenonregelung großer Leistungsreaktoren  
Atomforum, 197-200 (1973)
- [53] HANKE, W.  
Die Simulation von Regelstäben bei der optimalen Regelung von  
Xenonschwingungen  
Atomforum, 175-179 (1974)

- [54] HANKE, W.  
Xenonschwingungen und ihre Regelung bei großen Leistungs-  
reaktoren  
Berichte der KFA, Jülich, JÜL-1054-MA, 1974
- [55] HARTFIELD, G.L. DEREMER, R.K., ENGLAND, T.R.  
Stability Characteristics of Large-Blanket Reactors  
Trans. Am. Nucl. Soc. 10, 255-256 (1967)
- [56] HENRY, A.F., GERMAN, J.D.  
Oscillations in the Power Distribution within a Reactor  
NSE 2, 469-480 (1957)
- [57] HERMES, H., LASALLE, J.P.  
Functional Analysis and Time Optimal Control  
Academic Press, New York, 1969
- [58] HETRICK, D.L., WEAVER, L.E.  
Neutron Dynamics and Control  
USAEC/Div. Techn. Inf., 1966
- [59] HOOPER, R.J., RYDIN, R.A., STACEY, J.R.  
Verifikation of a Xenon Spatial Stability Criterion  
NSE 34, 344-346 (1968)
- [60] HSU, Ch.  
Control and Stability Analysis of Spatial Dependent Nuclear  
Reactor Systems  
Purdue Univ., 1967
- [61] HSU, Ch.  
Optimal Control of Spatial Dependent Nuclear Reactors  
Transactions ANS 10, 253-254 (1967)
- [62] JACOBY, S.L.S., KOWALIK, J.S., PIZZO, J.T.  
Iterative Methods for Nonlinear Optimization Problems  
Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1972
- [63] KALMAN, R.E.  
Contributions to the Theory of Optimal Control

Proc. Mexico City Conf. Ordinary Differential Equations,  
1959, Bol. Soc. Math. Mex. 102-119 (1960)

- [64] KAPLAN, S.  
The Property of Finality and the Analysis of Problems  
in Reactor Space-Time Kinetics by Various Modal Expansions  
NSE 9, 357-361 (1961)
- [65] KAPLAN, S.  
Synthesis Methods in Reactor Analysis  
Adv. Nucl. Sci. Techn. 3, 233-266 (1966)
- [66] KAPLAN, S., YASINSKY, J.B.  
Natural Modes of the Xenon Problem with Flow Feedback  
- An Example - NSE 25, 430-438 (1966)
- [67] KASTENBERG, W.E.  
On the Stability Problem for Distributed  
Parameter Energy Systems  
Int. J. Control 12, 567-575 (1970)
- [68] KASTENBERG, W. E.  
On the Stability of Equilibrium of a Distributed  
Parameter Feedback Control System  
Int. J. Control 6, 523-536 (1967)
- [69] KASTENBERG, W.E., CHAMBRÉ, P.L.  
On the Stability of Nonlinear Space-Dependent Reactor Kinetics  
NSE 31, 67-79 (1968)
- [70] KELLER, H.B.  
Numerical Methods for Two-Point Boundary-Value Problems  
Blaisdell Publ. Comp., Waltham, Mass., 1968
- [71] KERR, R.E., LENNOX, W.C.  
Extending Reactor Time-to-Poison by Pre-Shutdown Power Alterations

AECL-1619, 1962

- [72] KOWALIK, J., OSBORNE, M.R.  
Methods for Unconstrained Optimization Problems  
Am.Elsevier Publ. Comp., New York, 1968
- [73] KREIL, W.F.  
Stabilitätsverfahren für lineare zeitvariable Systeme  
VDI-Verlag, Düsseldorf, 1974
- [74] KYONG, S.H.  
An Optimal Control of a Distributed Parameter Reactor  
NSE 32, 146-149 (1968)
- [75] LAPIDUS, L., SEINFELD, J. H.  
Numerical Solutions of Ordinary Differential Equations  
Math. in Sci. and Eng., Vol 74  
Academic Press, New York, 1971
- [76] LASALLE, J.P.  
The Time-optimal Control Problem  
aus: Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations  
Princeton University Press, Princeton, N.J., 1960, p. 1-24
- [77] LASALLE, J.P., LEFSCHETZ, S.  
Die Stabilitätstheorie von Ljapunoff - die direkte Methode  
mit Anwendungen  
BI, Mannheim, 1967
- [78] LAUER, A.  
Räumliche Xenon-Schwingungen in Hochtemperaturreaktoren  
JÜL-850-RG, 1972
- [79] LAUER, A.  
Zur Stabilität und Regelung der räumlichen Leistungs-  
verteilung großer HTR-Cores  
Atomkernenergie 22, 184-192 (1973)

- [80] LEE, J.C.  
Application of an Improved Time-Difference Method for  
Spatial Xenon Transient Analysis  
NSE 54, 206-214 (1974)
- [81] LEE, E.B.  
Design of Optimum Multivariable Control Systems  
J. of Basic Eng. 83, ser. D, 85 - 89 (1961)
- [82] LEONDES, C. T. (ed.)  
Advances in Control Systems, 1964 irreg. -  
Academic Press, New York
- [83] LEWINS, J.  
The Time-Dependent Importance of Neutrons and Precursors  
NSE 7, 268-274 (1960)
- [84] LEWINS, J.  
Variational Representations in Reactor Physics Derived  
from a Physical Principle  
NSE 8, 95-104 (1960)
- [85] LEWINS, J. BABB, A.  
Optimum Nuclear Reactor Control Theory  
Adv. in Nucl. Sci. and Techn. 4, 252-308 (1968)
- [86] LEWINS, J., WOODCOCK, G.R., WILLIAMSON, T.J. & BABB, A.L.  
Energy Optimal Xenon Shutdown  
NSE 31, 272-282 (1968)
- [87] LIONS, J.L.  
Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des  
équations aux dérivées partielles  
Dunod Gauthier-Villars, Paris, 1968



- [88] LOVE, C.G.  
A Nonlinear Dynamic Optimization Technique for Controlling Xenon Induced Oscillations in Large Nuclear Reactors  
IEEE, Transac. on Nucl. Sci 18, 408-411 (1971)
- [89] MAC FARLANE, A.G.J.  
Analyse technischer Systeme  
BI, Mannheim, 1967
- [90] MATSUMOTO, J., KOICHI, I.  
Feedback Control of Distributed Parameter Systems with Spatially Concentrated Controls  
Int. J. Control 12, 401-419 (1970)
- [91] MAYNE, D.  
A Second-order Gradient Method for Determining Optimal Trajectories of Nonlinear Discrete-Time Systems  
Int. J. Control 3, 85-95 (1966)
- [92] MEDITCH, J.S.  
The Pontryagin Maximum Principle and Some of Its Applications  
Adv. in Contr. Systems 1, 55-74 (1964)
- [93] MOHLER, R.R., PRICE, H.J.  
Optimal Nuclear Reactor Control Techn. Report EE-142,  
Albuquerque, New Mexico Univ., N. Mex., 1967
- [94] MOHLER, R.R., SHEN, C.N.  
Optimal Control of Nuclear Reactors  
Academic Press, New York, 1970
- [95] MOTODA, H.  
Optimal Control Rod Programming of Light Water Reactors in Equilibrium Fuel Cycle

- NSE 46, 88-111 (1971)
- [96] MOTODA, H., KAWAI, T.  
A Theory of Control-Rod Programming  
Optimization in Two-Region Reactors  
NSE 39, 114-118 (1970)
- [97] NEEF, H.-J.  
Berechnung der Wirksamkeit von Absorberstäben in  
Hochtemperaturreaktoren unter Verwendung transporttheoretisch  
bestimmter Randbedingungen mit einem 3-dim. Diffusionsprogramm  
JÜL-980-RG, 1973
- [98] NEEF, W.I.  
Galahad - A Code für Optimizing Control of Xenon  
Transients with Dynamic Programming  
GA 9166, 1966
- [99] NELSON, JR.P., YOUNG, G.  
Optimal Strategies in Reactor System  
Economics  
NSE 46, 140-146 (1971)
- [100] NEMHAUSER, G.L.  
Einführung in die Praxis der dynamischen Programmierung  
R. Oldenbourg, München, 1969
- [101] NEUMANN, K.  
Ein Verfahren zur Lösung gewisser nichtlinearer Kontrollprobleme  
Computing 6, 249-263 (1970)
- [102] NEUMANN, K.  
Dynamische Programmierung, Theorie und Anwendung  
BI, Mannheim, 1969

- [103] NGYEN, D.H.  
The New Equilibrium State of a Perturbed Nuclear  
Reactor with Negative Feedback  
NSE 52, 292-298 (1973)
  
- [104] NGYEN, D.H.  
Stability of Nuclear Reactors with Changes in Eigenvalue  
NSE 52, 370-381 (1973)
  
- [105] NOUR ELDIN, H.A.  
Optimierung linearer Regelsysteme mit quadratischer Ziel-  
funktion  
Springer, Berlin, 1971
  
- [106] OLSSON, G.  
Simplified Models of Xenon Spatial Oscillations  
Atomkernenergie 16-17, 91-98 (1970)
  
- [107] PARTAIN, C.L.  
A Direct Digital Control Study for Nuclear Reactor Systems  
Diss. Purdue Univ., 1967
  
- [108] PAYNE, J.A.  
Computational Methods in Optimal Control Problems  
Adv. in Control Systems 7, 79-164 (1969)
  
- [109] PETRY, W.  
Ein Existenzsatz über ein Randwertproblem einer Klasse  
nichtlinearer gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter  
Ordnung  
Math. Zeitschr. 90, 190-201 (1965)
  
- [110] PETRY, W.  
Ein Iterationsverfahren zum Lösen von Randwertproblemen  
nichtlinearer Differentialgleichungen  
Computing 5, 27-44 (1970)

- [111] PLATZKER, M., SIRAN, R.  
A Modification of Pern`yanov and Rubinov`s  
Iterative Method for the Minimization of Functionals  
Int. J. Control 12, 9-15 (1970)
  
- [112] PONCELET, C.G.  
Xenon Induced Spatial Instabilities in Large Pressured  
Water Reactors  
WCAP-3680-20, 1968
  
- [113] PONCELET, C.G., CHRISTIE, A.M.  
The Effect of a Finite Time-Step Length on Calculated  
Spatial Xenon Stability Characteristics in Large PWR`s  
Trans. Amer. Nucl. Soc. 10, 571 (1967)
  
- [114] PONTRYAGIN, L.S., BOLTJANSKIJ, V.G., GAMKRELIDZE, R.V.,  
MISCENKO, E.F.  
The Mathematical Theory of Optimal Processes  
Pergamon Press, 1964  
deutsch: R. Oldenbourg, München, 1967
  
- [115] RAFF, S.  
Ein Beitrag zur Optimierung von Reaktorsystemen  
Atomwirtschaft, 435-436 (1970)
  
- [116] RAJU, G.V.S., JOSSELSO, R.  
Stability of Reactor Control Systems  
in Coupled Core Reactors  
IEEE, Transact. Nucl. Sci 18, 388-394 (1971)
  
- [117] RANDALL, D., ST. JOHN, D. S.  
Xenon Spatial Oscillations  
Nucleonics 16, 82-86, 129 (1958)
  
- [118] REISTER, D.B., CHAMBRÉ, P.L.  
Solution Bounds for Nonlinear Space-Time Reactor Problems  
NSE 48, 211-218 (1972)

- [119] ROBERTS, J.J., FLEMING, R.F. & SMITH, JR.J.P.  
Experimental Application of the Time-Optimal Xenon Shutdown  
Programm  
NSE 27, 573-580 (1967)
- [120] ROBERTS, S.M., SHIPMAN, J.S.  
Two-Point boundary value  
Problems: Shooting Methods  
American Elsevier, New York, 1972
- [121] ROBERTS, J.J., SMITH, JR.H.P.  
Time Optimal Solution to the Reactivity-Xenon Shutdown Problem  
NSE 22, 470-478 (1965)
- [122] ROCH, A.  
L'empoisonnement Xénon d'un réacteur et sa représentation  
sur un plan de phase  
Neue Technik 4, 191-197 (1962)
- [123] ROSZTOCZY, Z.R.  
Optimal Xenon Shutdown Control of Nuclear Reactor  
Transactions ANS 10, 256-257 (1967)
- [124] ROSZTOCZY, Z.R. WEAVER, L.E.  
Optimal Reactor Shutdown Program for Minimum Xenon Buildup  
NSE 20, 318-323 (1964)
- [125] ROZONOER, L.I.  
L.S. Pontryagin Maximum Principle in the Theory of Optimum  
Systems. Parts I, II, III  
Automation and Remote Control 20, 1288-1302, 1405-1421, 1517-1532  
(1959)
- [126] RUBIO, J.E.  
On the Uniqueness of the Solutions of Some Equations  
of Optimal Control Theory  
Int. J. Control 3, 69-78 (1966)

- [127] RYDIN, R.A.  
Higher Mode Effects in Xenon Spatial Oscillations  
Trans. Am. Nucl. Soc. 15, 286-287 (1972)
- [128] SAGE, A.P.  
Gradient and Quasilinearization Computational Techniques  
for Distributed Parameter Systems  
Int. J. Contr. 6, 81-98 (1967)
- [129] SALO, S.  
On the Use of Maximum Principle in Optimal Xenon Shut-  
down Problems  
NSE 50, 46-52 (1973)
- [130] SCHMIDT, U.  
Zusatzprogramm SWR-Regelung Xenon-Programm  
BMBW-FB-K 72-20, 1972
- [131] SCHULTEN, R., GÜTH, W.  
Reaktorphysik I, II  
BI, Mannheim, 1960/62
- [132] SCHULTZ, M.A.  
Control of Nuclear Reactor Power Plants  
McGraw-Hill, New York, 1961
- [133] SCHWIECK, H.J.  
Temperaturrückkopplung bei der zweidimensionalen  
numerischen Analyse von Xenonschwingungen in Hochtemperaturreaktoren  
KFA-IRE-IB2/74
- [134] SHAMPINE, L.F.  
Some Nonlinear Boundary Value Problems  
Arch. Rat. Mech. Anal. 25, 123-134 (1967)

- [135] SHAMPINE, L.F.  
Some Nonlinear Eigenvalue Problems  
J. Math. Mech. 17, 1065-1072 (1968)
- [136] SHAMPINE, L.F.  
Existence of Solutions for Certain Nonlinear Boundary-Value Problems  
J. Math. Phys. 10, 1177-1178 (1969)
- [137] SHAMPINE, L.F., WING, G.M.  
Existence and Uniqueness of Solutions of a Class of Nonlinear Elliptic Boundary Value Problems  
J. Math. Mech. 19, 971-979 (1970)
- [138] SMITH, P.R.  
Variational Methods in Optimization  
Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1974
- [139] SHINODA, W., MITAKE, S.  
A Three-Dimensional Analysis of Xenon-Induced Oscillations in Boiling Water Cooled Reactors  
NSE 36, 372-388(1969)
- [140] SOLOMAN, K.A., KASTENBERG, W.E.  
Linear Stability of Fast and Thermal Reactor Models Using Space-Time Kinetics  
NSE 49, 99-103 (1972)
- [141] SPECKER, S.R.  
Applications of Optimal Control Theory to Space-Time Reactor Kinetics  
Diss. Iowa State Univ., 1970
- [142] STACEY, W.M.  
Linear Analysis of Xenon Spatial Oscillations  
NSE 30, 453-455 (1967)
- [143] STACEY, W.M.  
The Time-Integrated Method: A quasistatic Neutron Space-Time

## Approximation

Transac. ANS 10, 251-252 (1967)

- [145] STACEY, W.M.  
Xenon Spatial Oscillations  
Transac. ANS 10, 254 (1967)
- [146] STACEY, W.M.  
Optimal Control of Xenon-Power Spatial Transients  
NSE 33, 162-168 (1968)
- [147] STACEY, W.M.  
Space-Time Nuclear Reactor Kinetics  
Academic Press, New York, 1969
- [148] STACEY, W.M.  
Control of Xenon Spatial Oscillations  
NSE 38, 229-243 (1969)
- [149] STACEY, W.M.  
A Nonlinear Xenon Stability Criterion for a Spatially  
Dependent Reactor Model  
NSE 35, 395-396 (1969)
- [150] STACEY, W.M.  
A Application of Variational Synthesis to the Optimal Control  
of Spatially Dependent Reactor Models  
NSE 39, 226-230 (1970)
- [151] STACEY, W.M.  
Xenon-Induced Spatial Power Oscillations  
Reactor Technology 13, 252-279 (1970)
- [152] STEWART, J.W. II  
The Approximate Solution of the Xenon-Transient Problem by a  
Model Expansion Technique  
Diss. Univ. of Tennessee , 1969
- [153] TERNEY, W.B.  
Analytic Solution to the Flat Flux Problem



NSE 45, 226-230 (1971)

- [154] TERNEY, W.B.  
Optimization Techniques in Nuclear Engineering  
Diss. MIT, Cambridge (Mass.), 1967
- [155] TERNEY, W.B., FENECH, H.  
Control Rod Programming Optimizations Using Dynamic Programming  
NSE 39, 109-114 (1970)
- [156] TOLLE, H.  
Optimierungsverfahren  
Springer, Berlin, 1971
- [157] TOU, J.T.  
Modern Control Theory  
McGraw Hill, New York, 1964
- [158] TZAFESTAS, S.G.  
Optimal Distributed-Parameter Control Using Classical  
Variational Theory  
Int. J. Control 12, 593-608 (1970)
- [159] VAINBERG, M.M.  
Variational Methods for the Study of Nonlinear Operators  
Holden-Day Inc, San Francisco, 1964
- [160] VARGA, R.S.  
Numerical Methods and Techniques Used in the Two-Dimensional  
Neutron-Diffusion Program PDQ-5  
WAPD-TM-364
- [161] WACHSPRESS, E.L.  
Iterative Solution of Elliptic Systems and Applications to the  
Neutron Diffusion Equation of Reactor Physics  
Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1966

- [162] WADE, D.C. TERNEY, W.B.  
Optimal Control of Nuclear Reactor Depletion  
NSE 45, 199-217 (1971)
- [163] WANG, P.K.C.  
Control of Distributed Parameter Systems  
Adv. Contr. Systems 1, 75-172 (1964)
- [164] WANG, P.K.C.  
Stability Conditions for a Mixed Distributed and Lumped  
Parameter Control System  
Int. J. Control 6, 65-73 (1967)
- [165] WANG, P.K.C.  
On the Stability of Equilibrium of a Mixed Distributed and  
Lumped Parameter Control System  
Int. J. Control 3, 139-147 (1966)
- [166] WANG, P.K.C.  
On the Feedback Control of Distributed Parameter Systems  
Int. J. Control 3, 255-273 (1966)
- [167] WECK, N.  
Über Existenz, Eindeutigkeit und das "Bang-bang-Prinzip" bei  
Kontrollproblemen aus der Wärmeleistung  
Bonner math. Schriften, 1974
- [168] WEAVER, L.E.  
System Analysis of Nuclear Reactor Dynamics  
Rowman and Littlewood Inc., New York, 1963
- [169] WEAVER, L.E.  
Reactor Dynamics and Control  
Am. Elsevier, New York, 1968
- [170] WEIHRICH, G.  
Optimale Regelung linearer deterministischer Prozesse  
R. Oldenbourg, München, 1973

- [171] WEINBERG, A.M., WIGNER, E.P.  
The Physical Theory of Neutron Chain Reactors  
University of Chicago Press, Chicago, 1958
- [172] WIBERG, D.M.  
System Analysis of Nuclear Reactor Dynamics  
Adv. Control Systems 5, 301-388 (1967)
- [173] WIBERG, D.M.  
Controllability of the Spatial Flux Shape  
NSE 27, 600-604 (1967)
- [174] WILSON, J.V.  
Xenon Instabilities  
Nuclear Safety 5, 345-354 (1964)

## A b b i l d u n g e n

Auf den 3-D-Bildern zeigt die x-Achse das Intervall (0 cm, 640 cm), auf der t-Achse ist jeweils ein Intervall von 60 Std. dargestellt, das normalerweise bei 0 Std. beginnt, mit Ausnahme der Bilder, auf denen die Endzeitpunkte angegeben sind.

Abb. 1

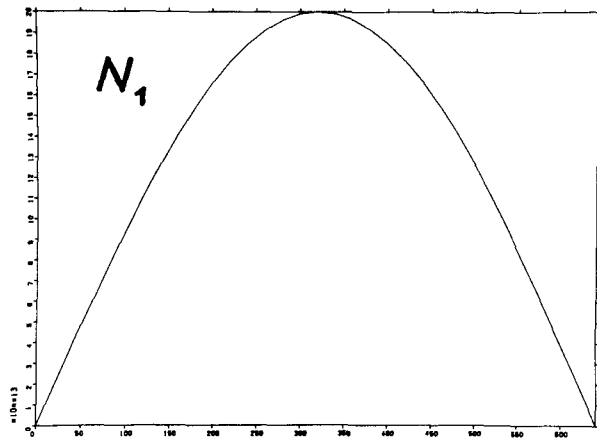


Abb. 2

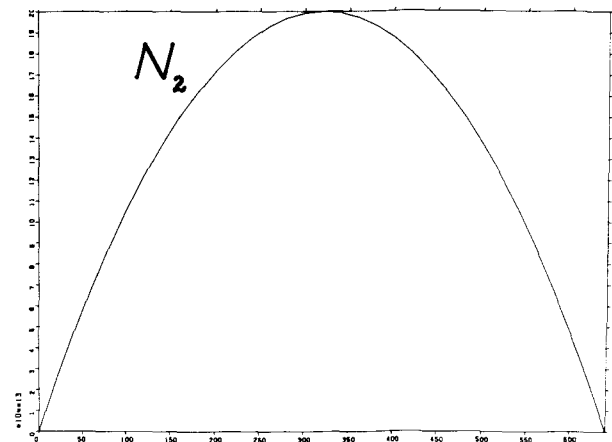


Abb. 3

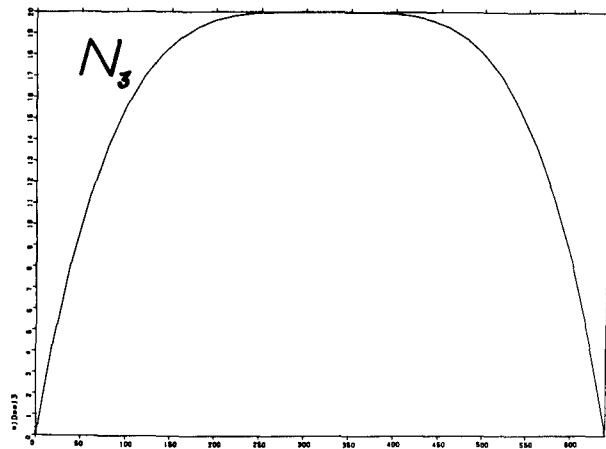


Abb. 4

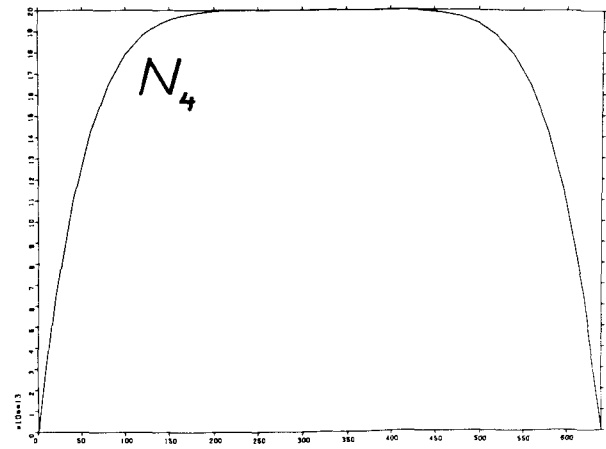


Abb. 5

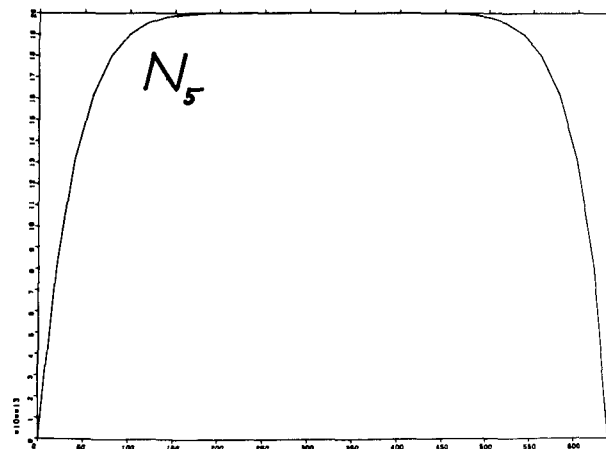


Abb. 6

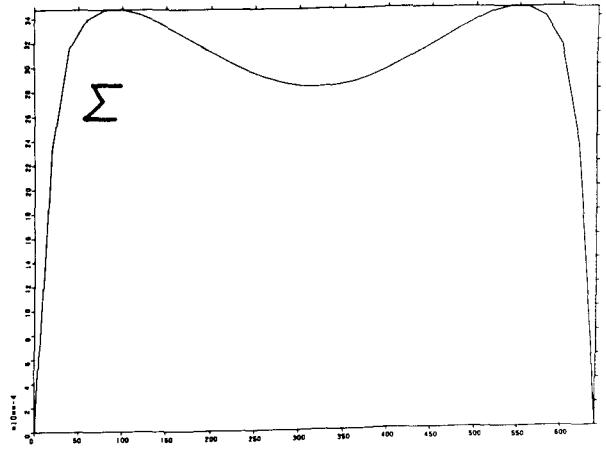


Abb. 7

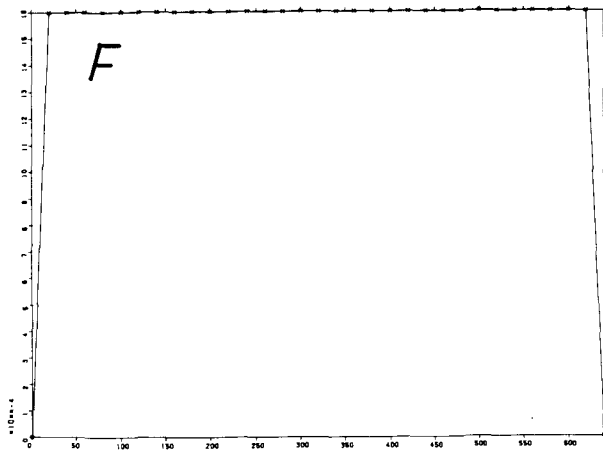


Abb. 8

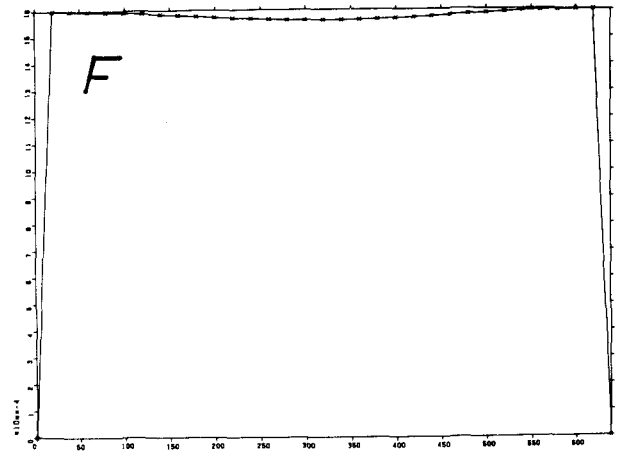


Abb. 9

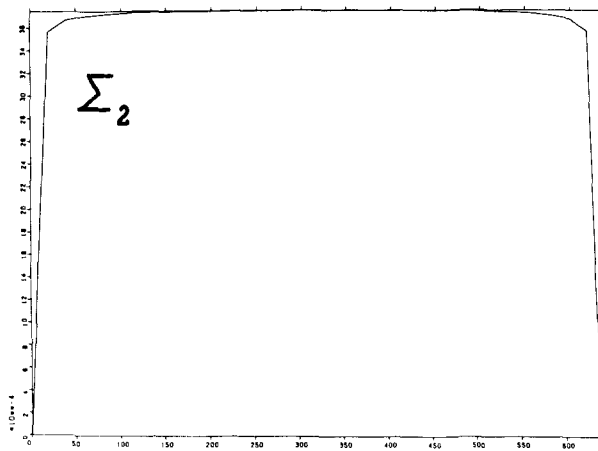


Abb. 10

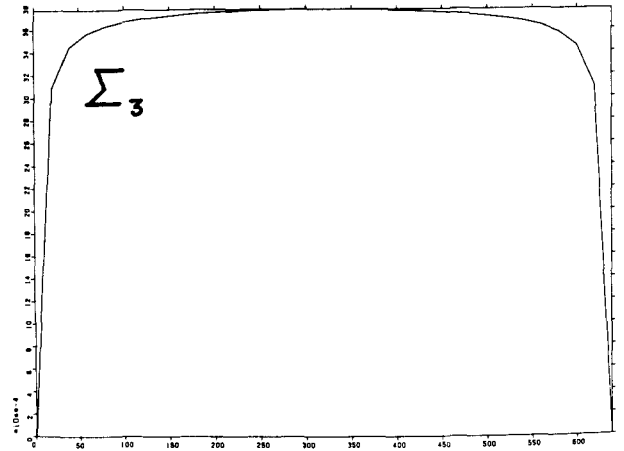


Abb. 11

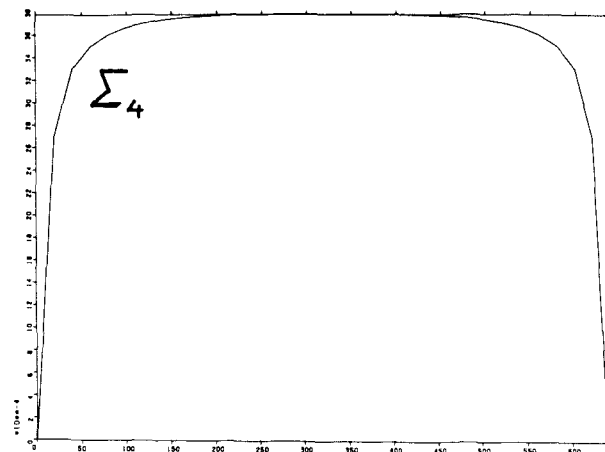
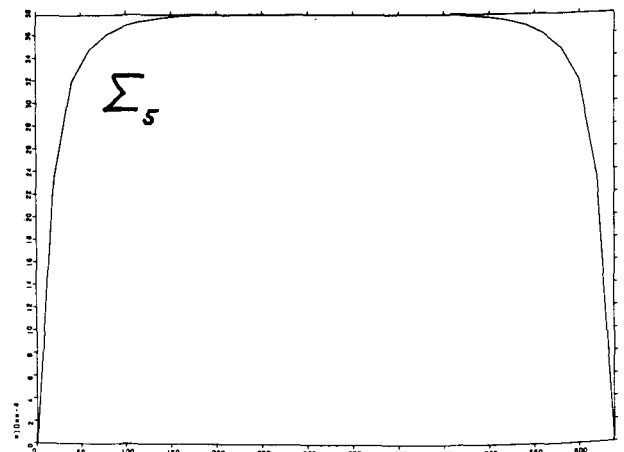
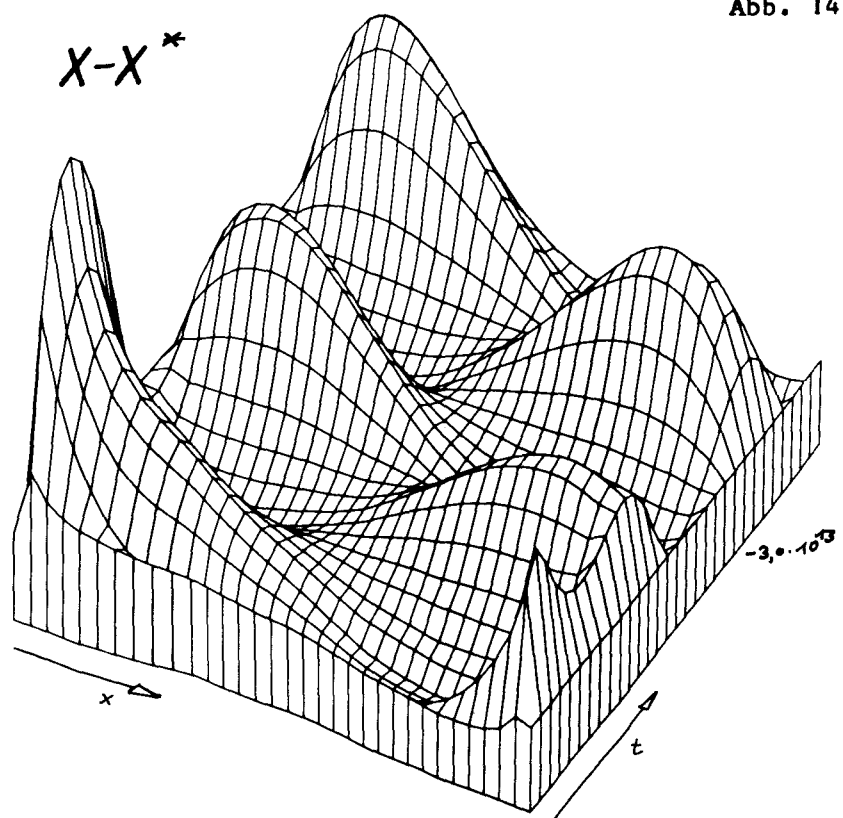
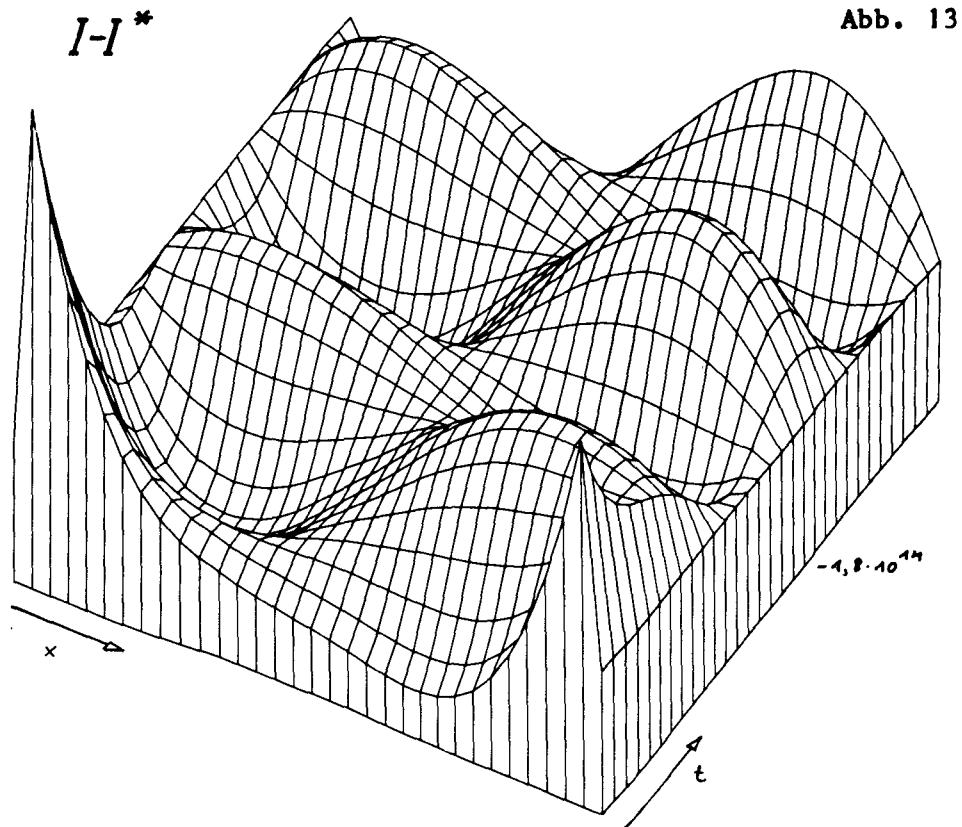


Abb. 12





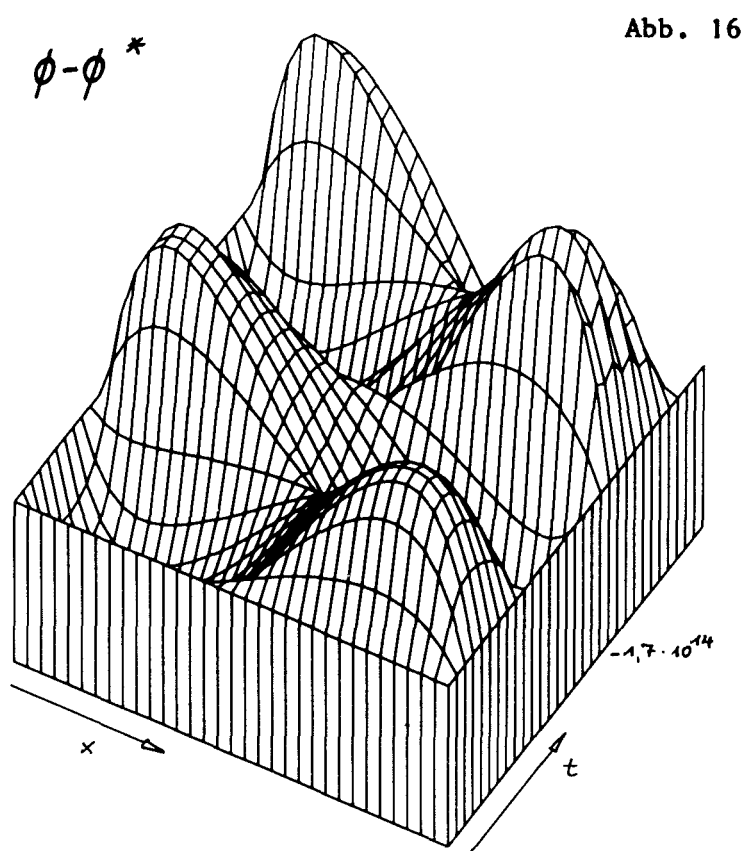
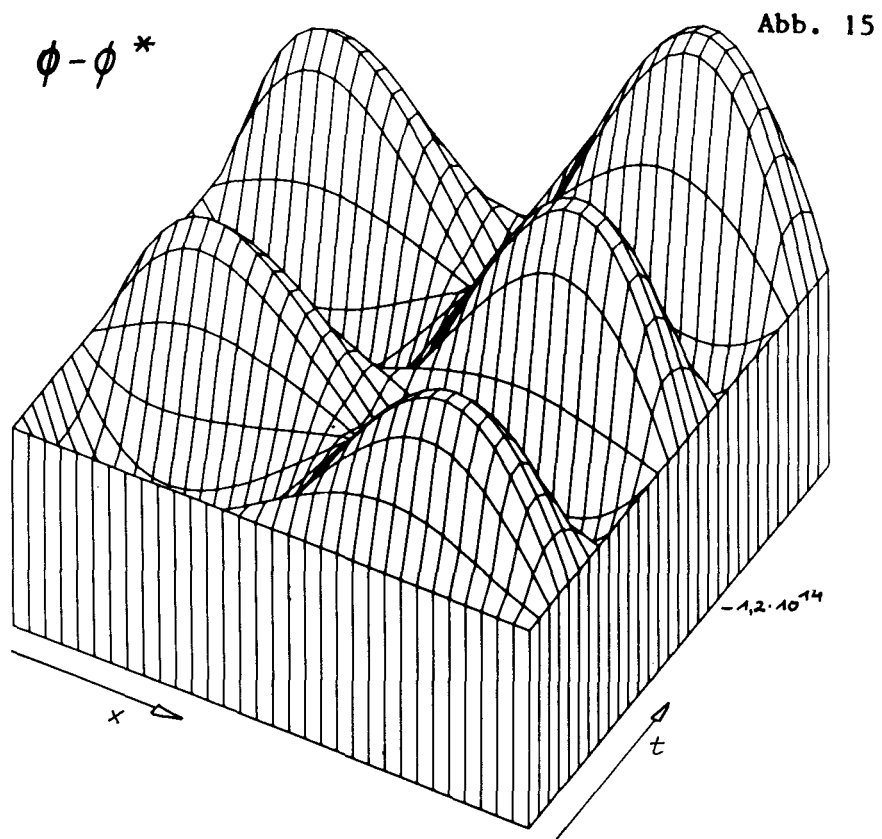




Abb. 17

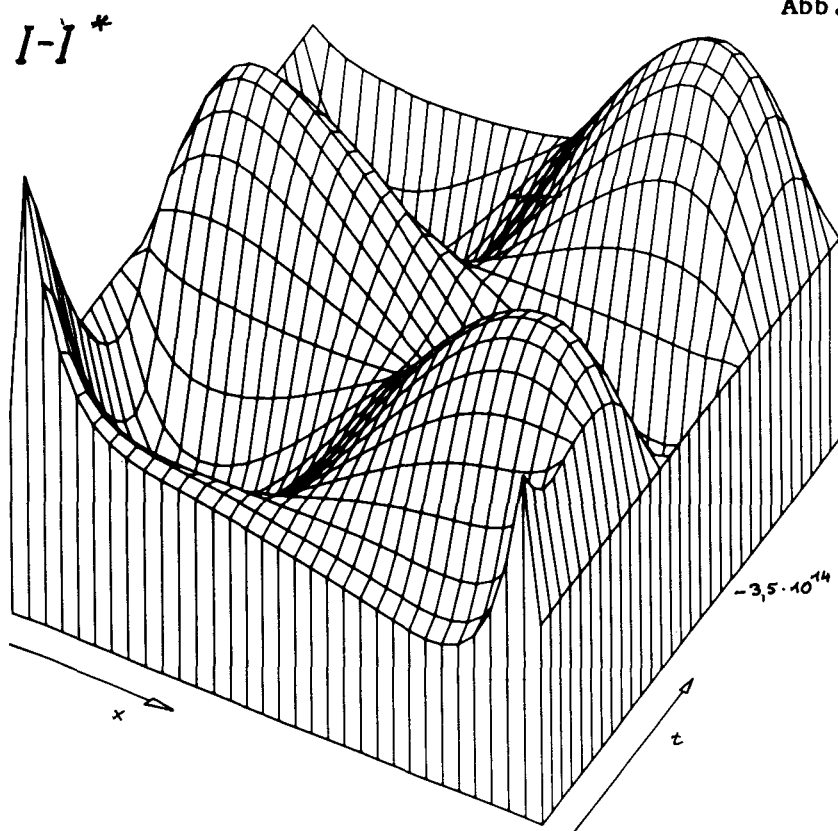


Abb. 18

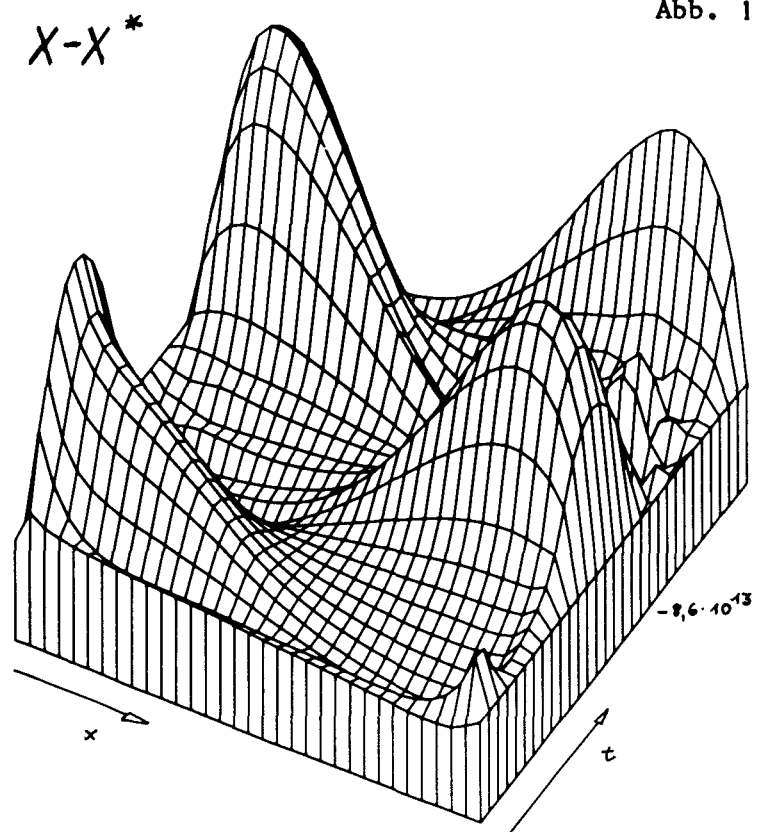


Abb. 19

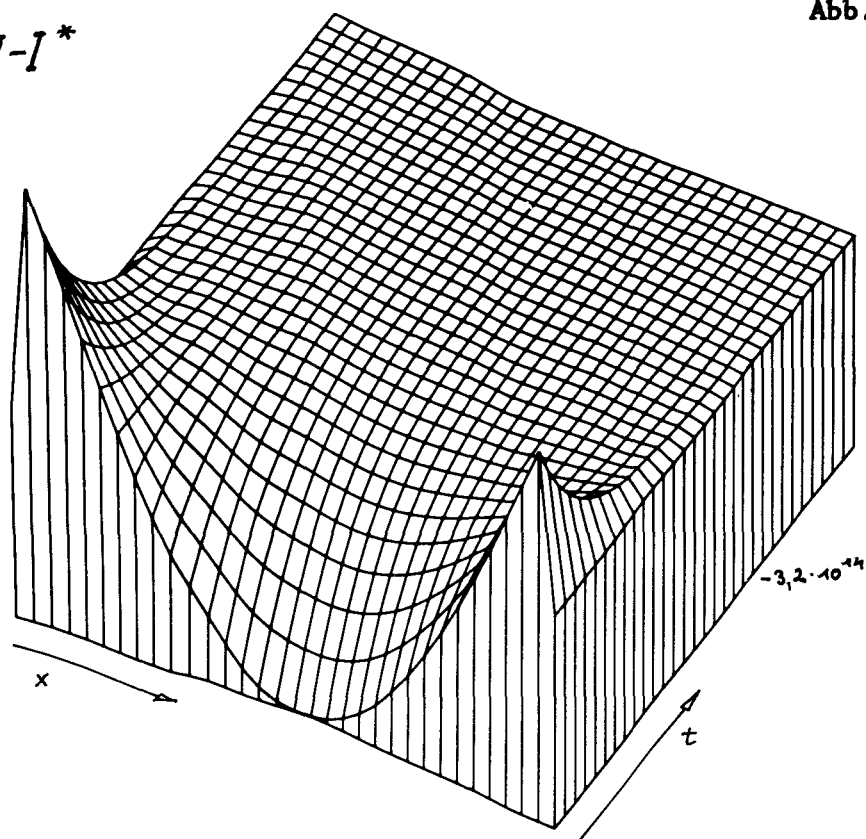
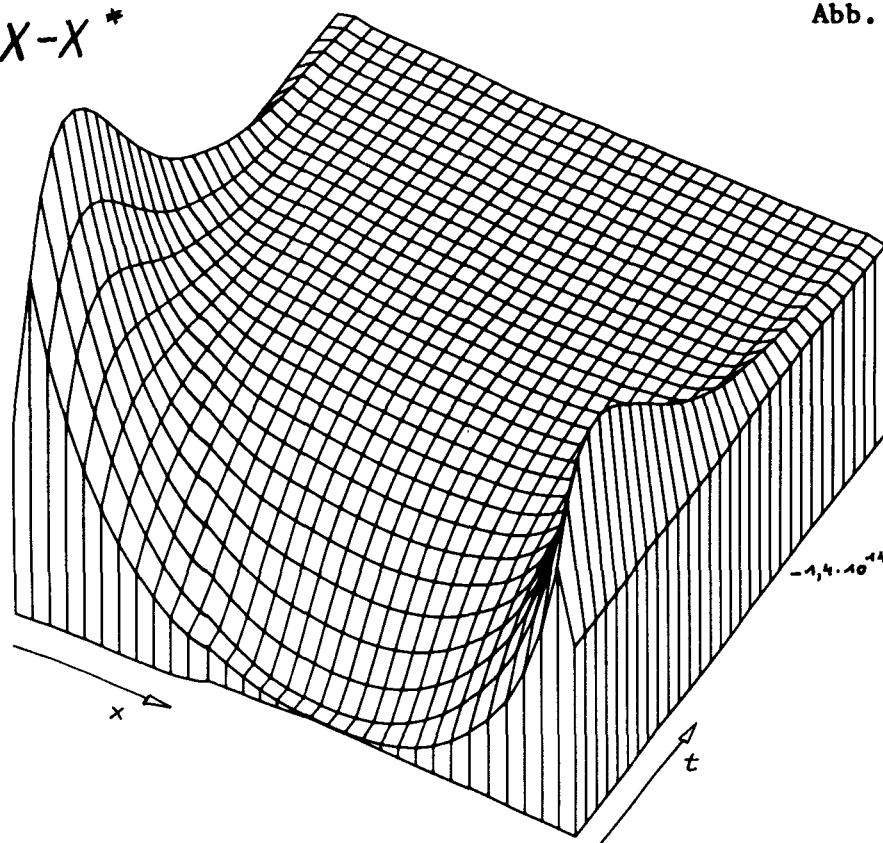
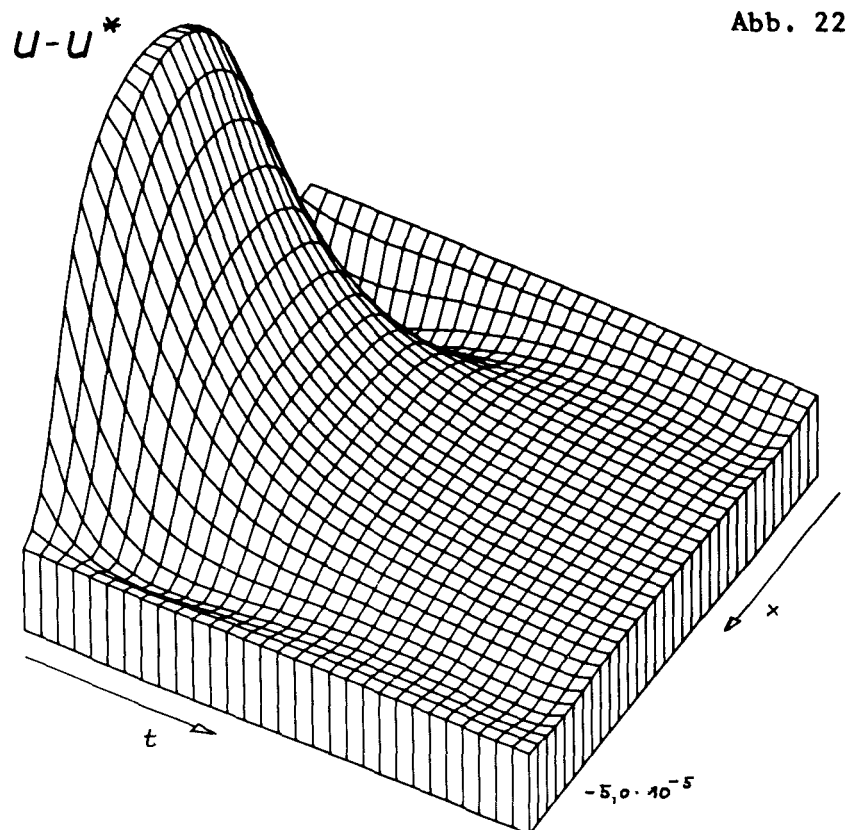
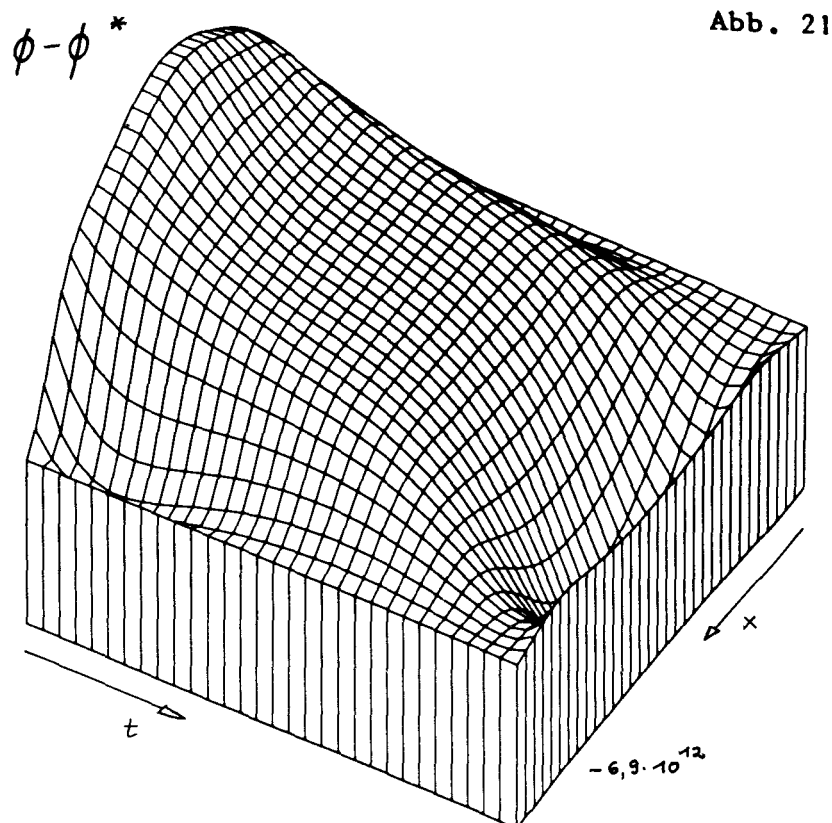
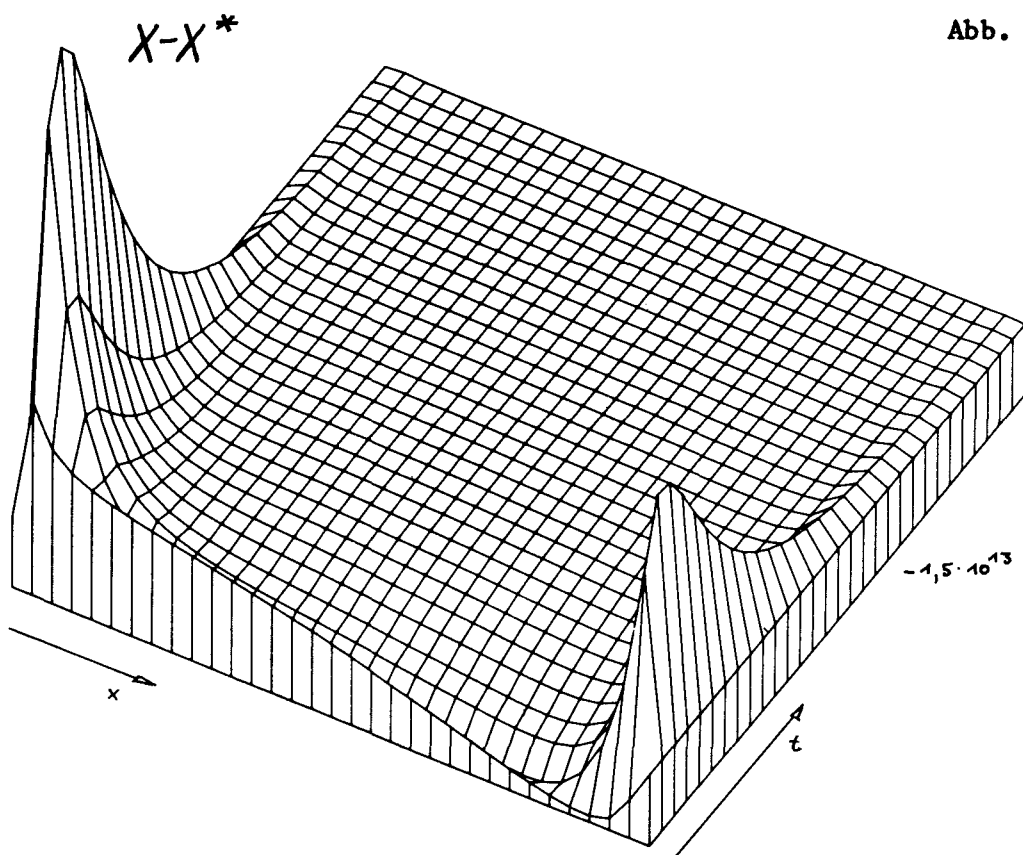
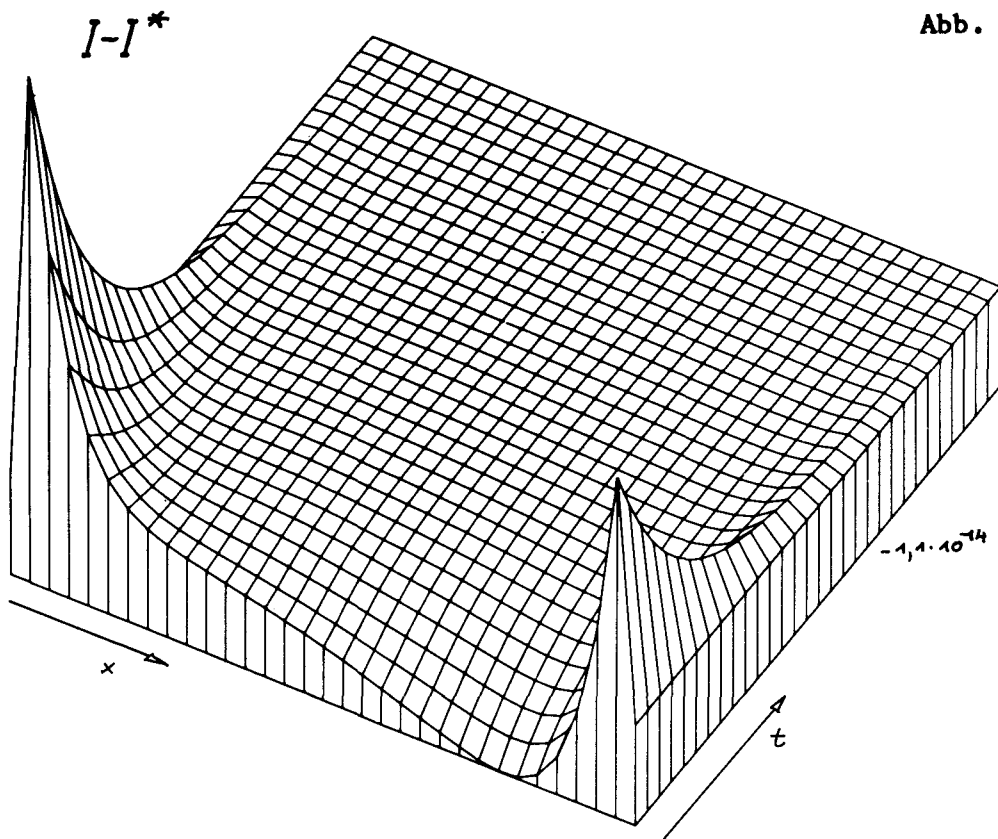
 $I-I^*$ 

Abb. 20

 $X-X^*$ 





$\phi - \phi^*$ 

Abb. 25

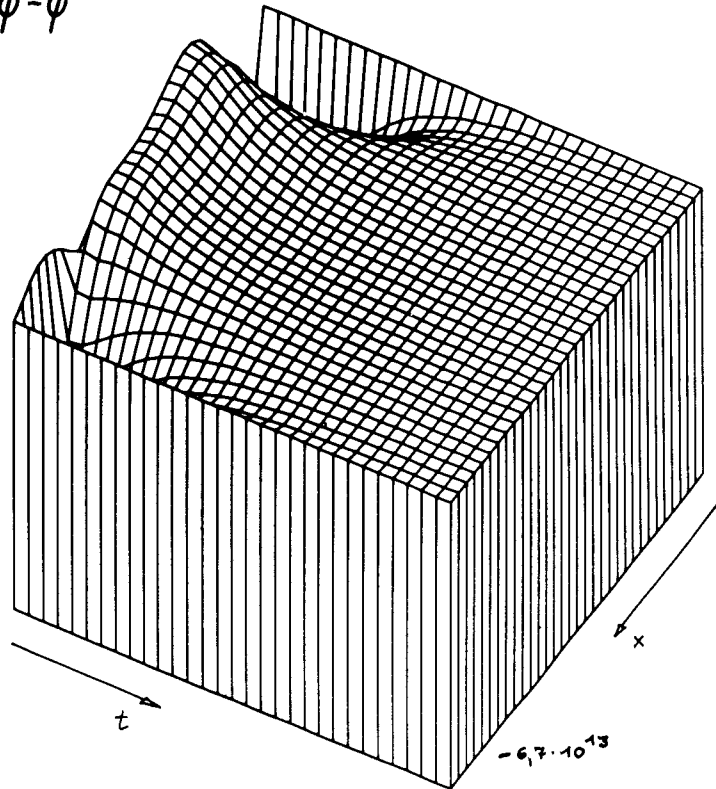
 $U - U^*$ 

Abb. 26

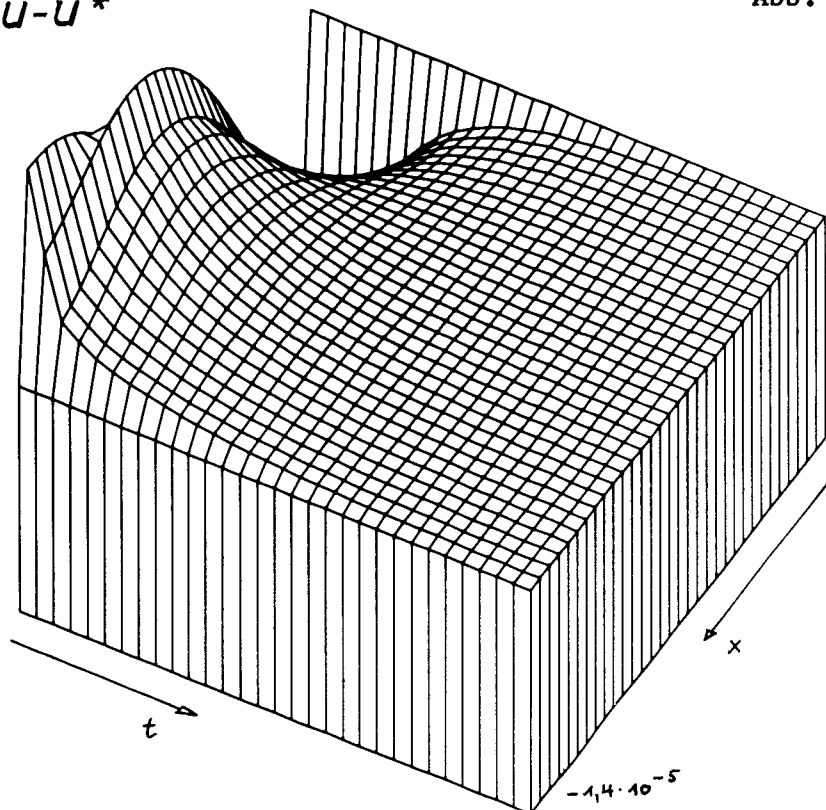


Abb. 27

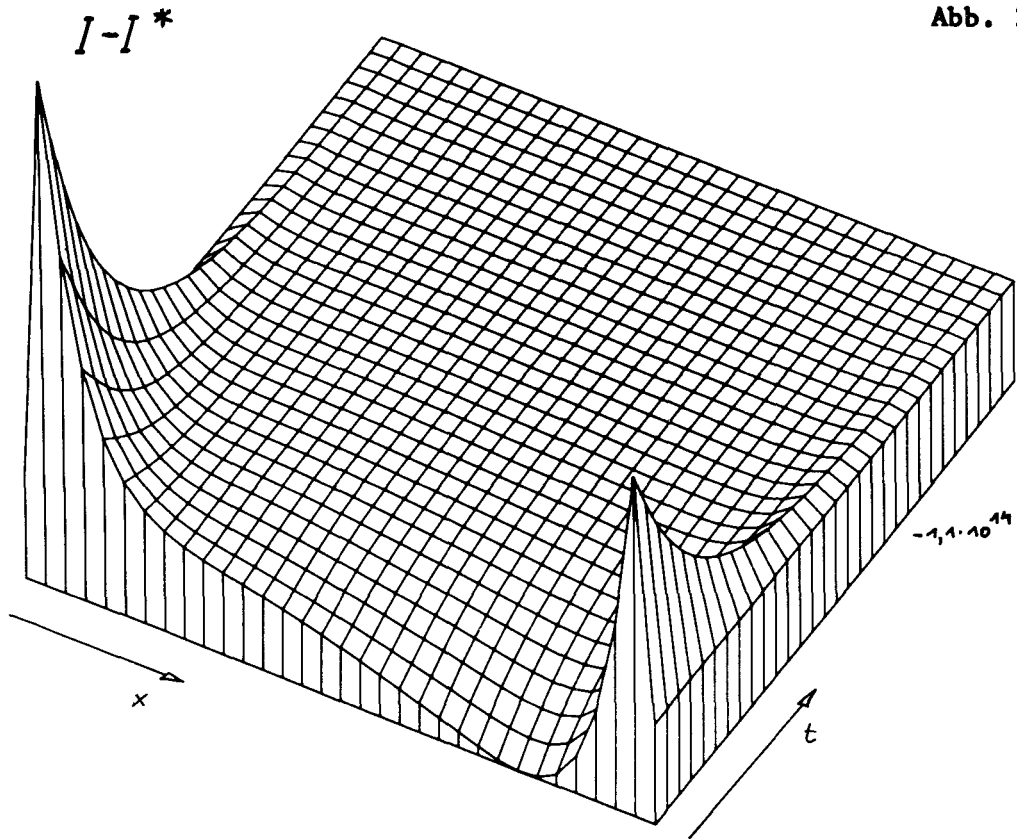
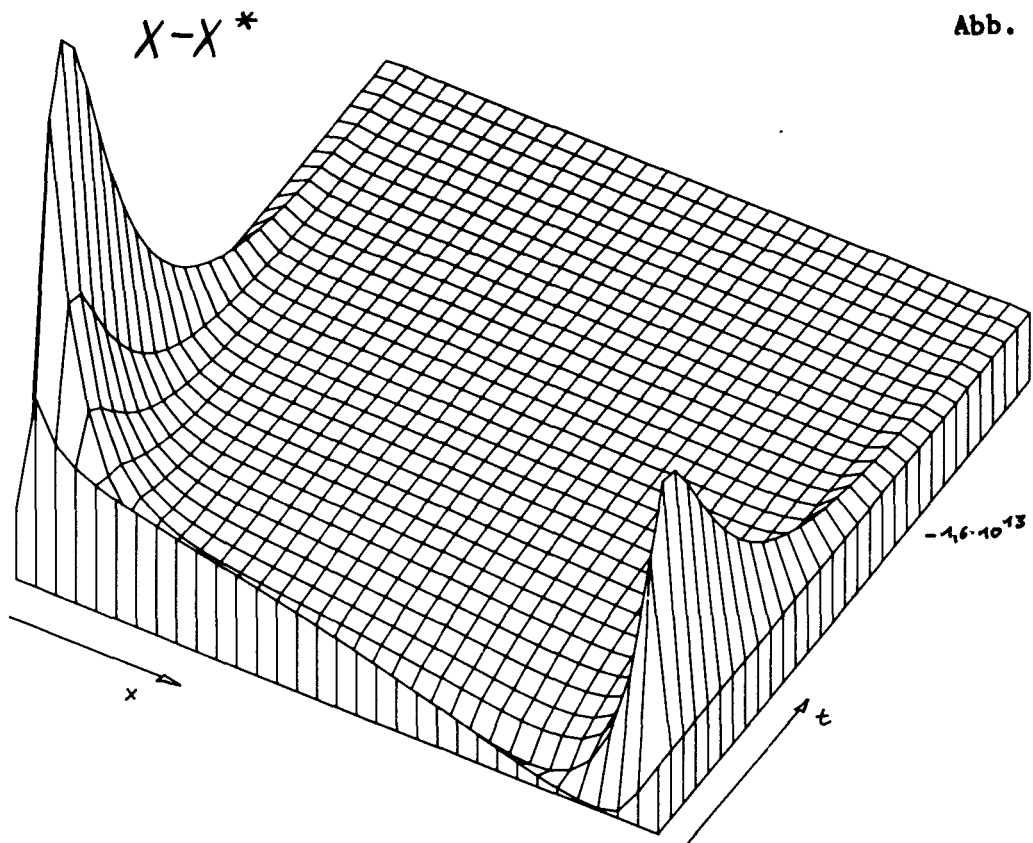


Abb. 28



$\phi - \phi^*$ 

Abb. 29

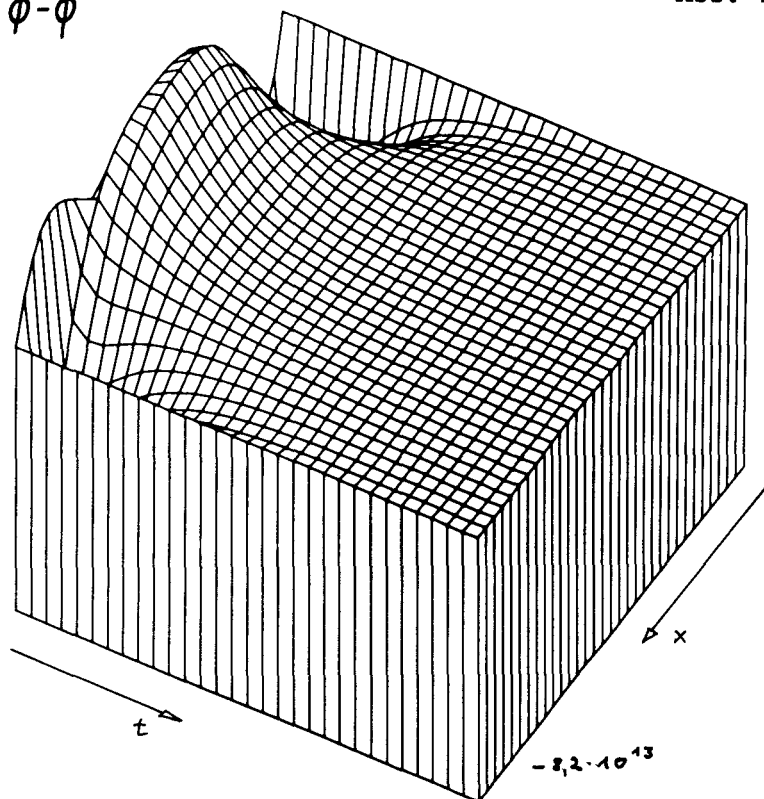
 $U - U^*$ 

Abb. 30

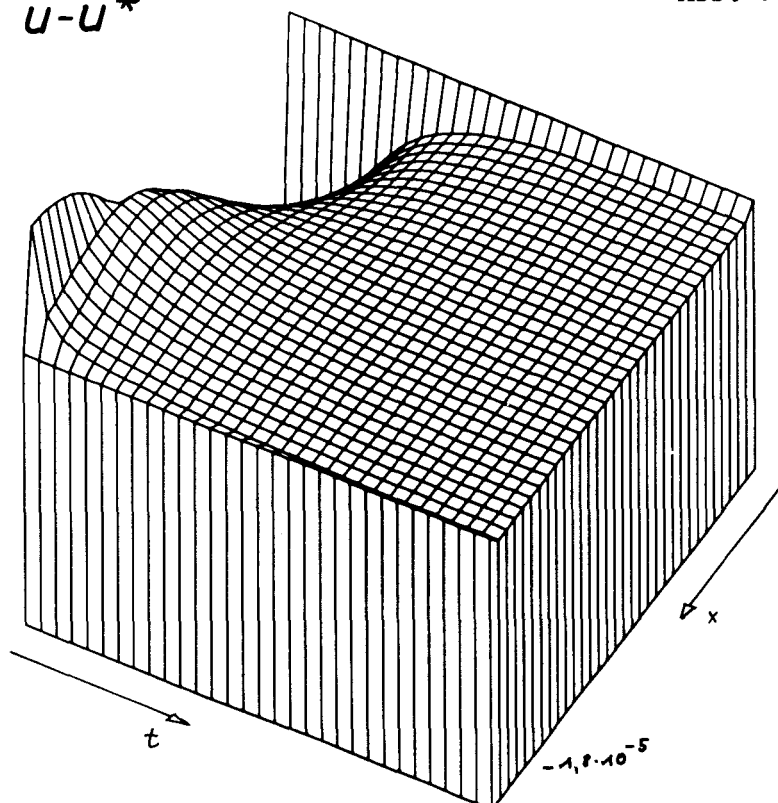


Abb. 31

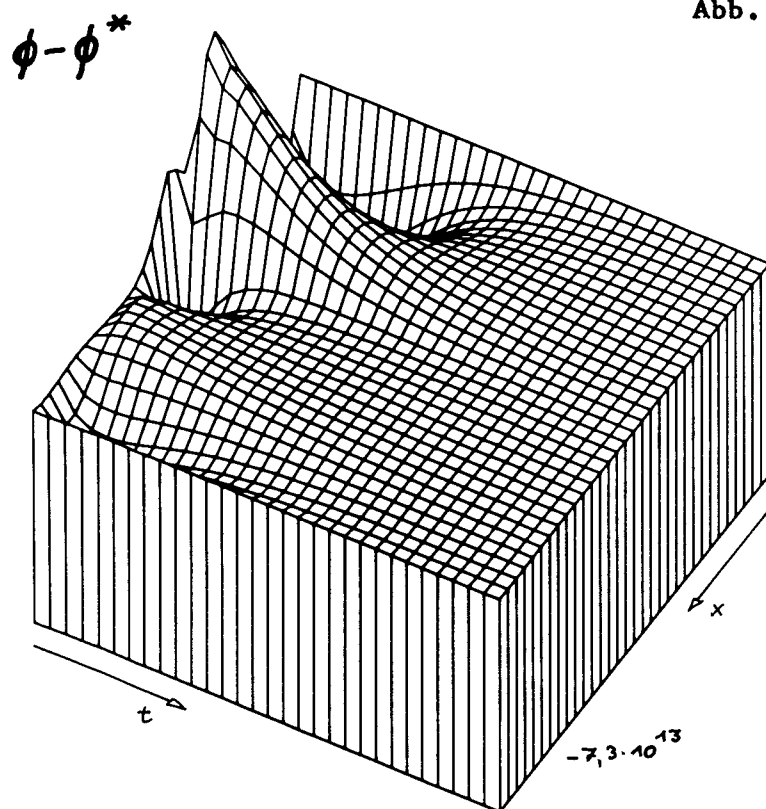
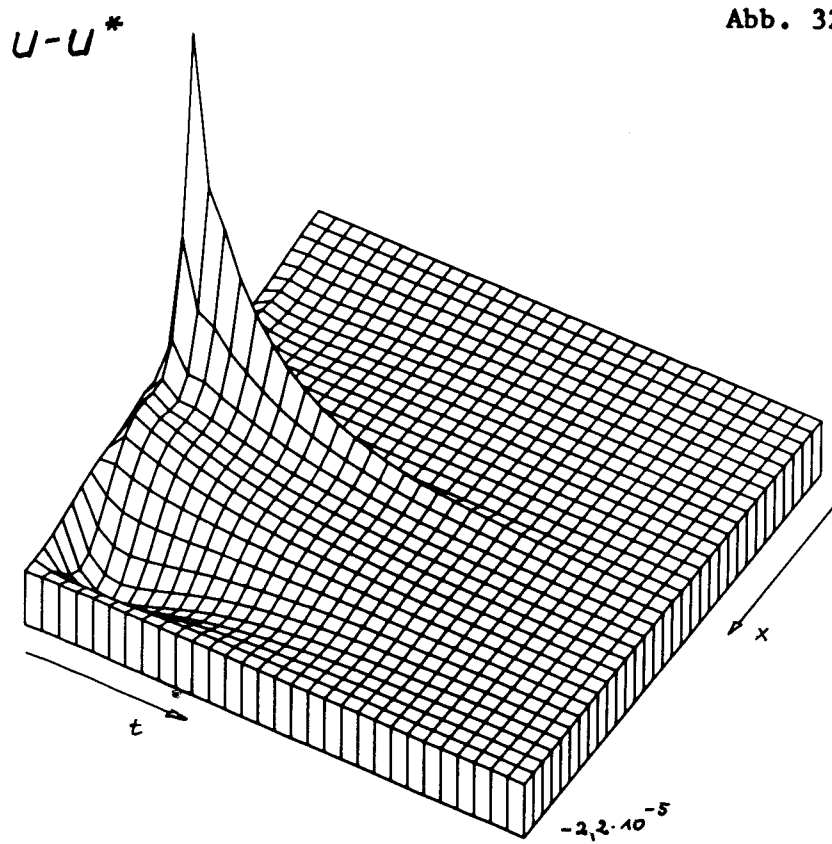


Abb. 32





$\phi - \phi^*$ 

Abb. 33

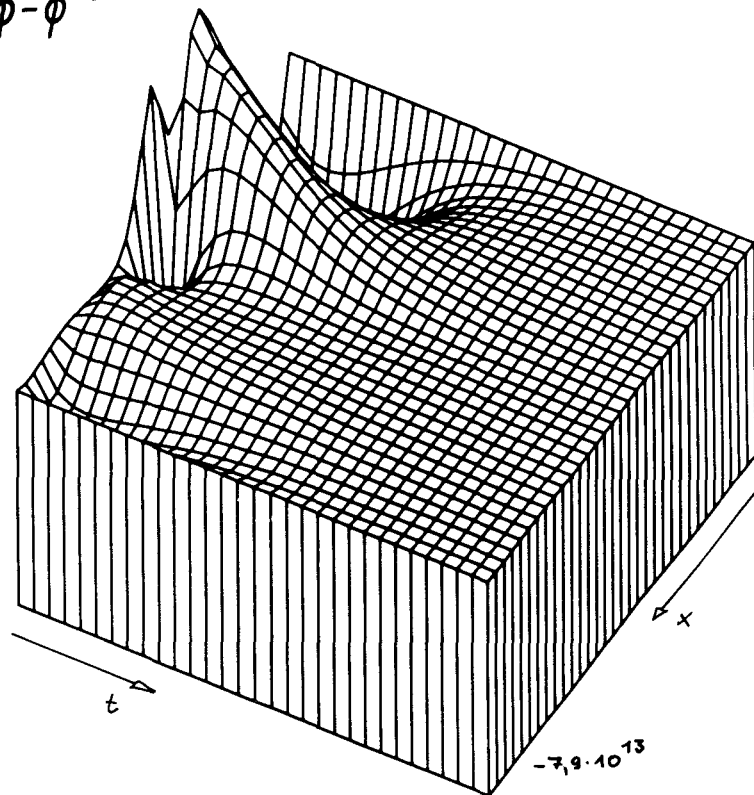
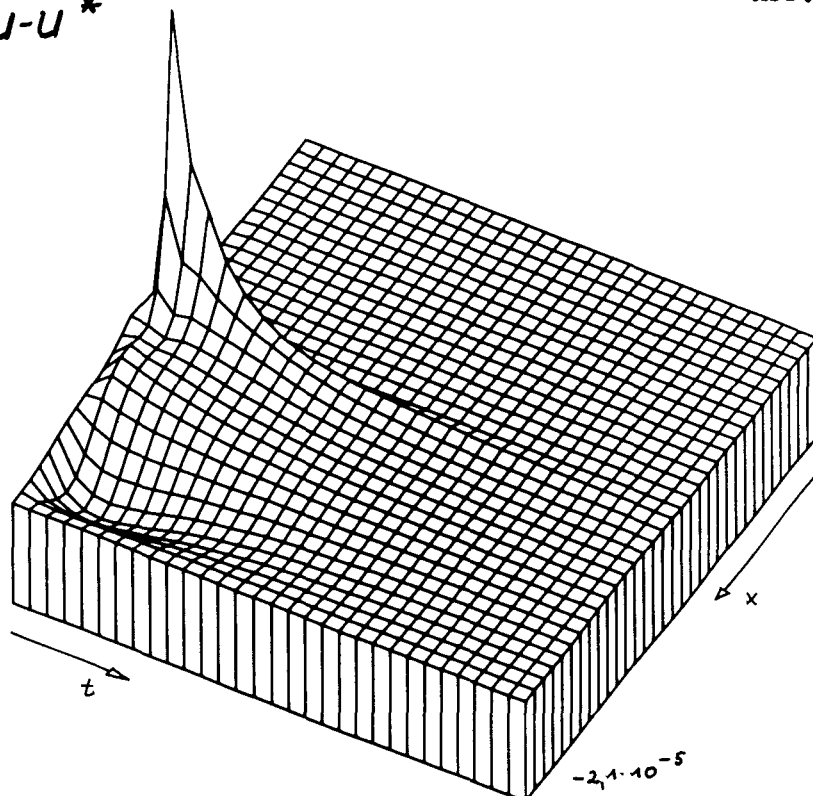
 $U - U^*$ 

Abb. 34



$\phi - \phi^*$ 

Abb. 35

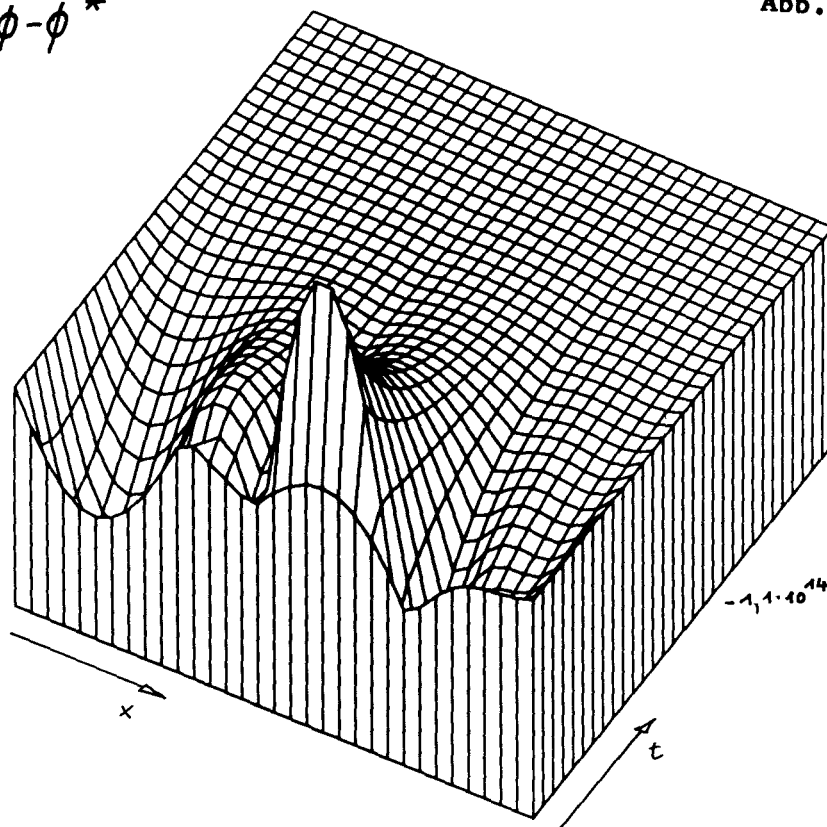
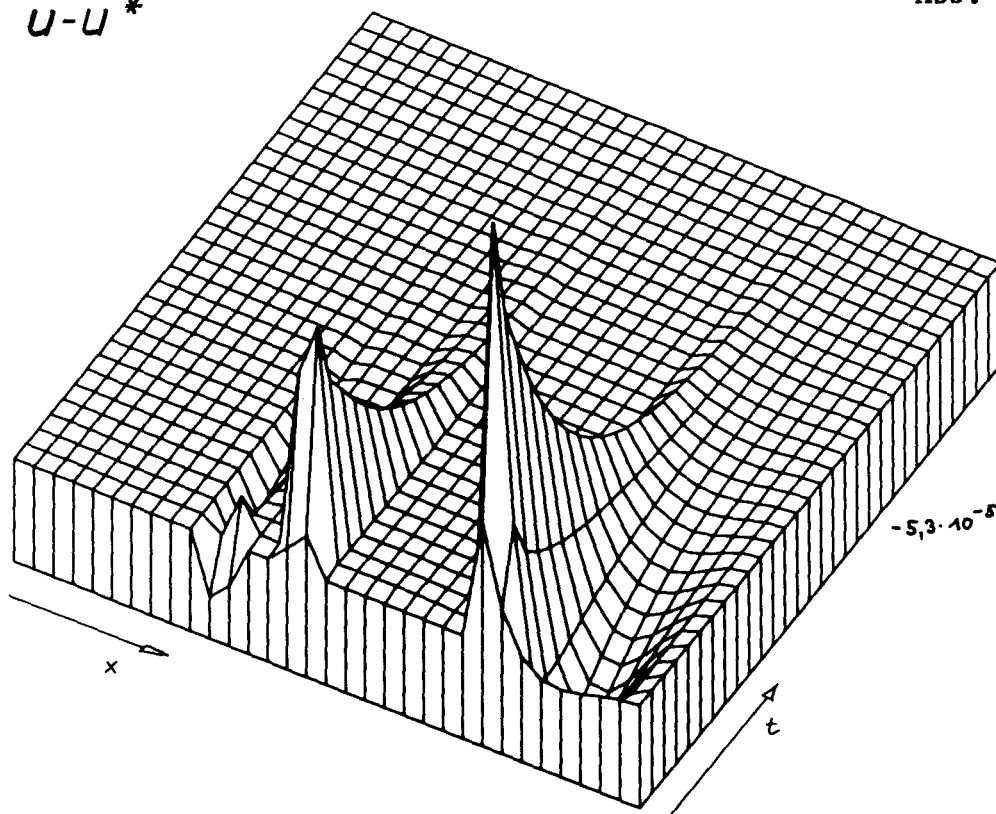
 $U - U^*$ 

Abb. 36



$\phi - \phi^*$ 

Abb. 37

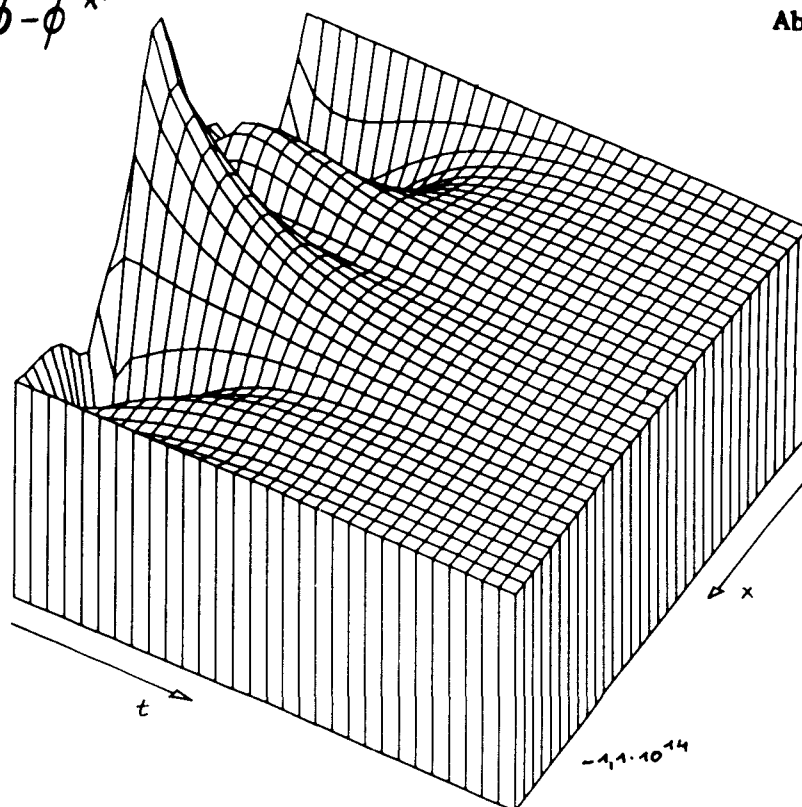
 $U - U^*$ 

Abb. 38

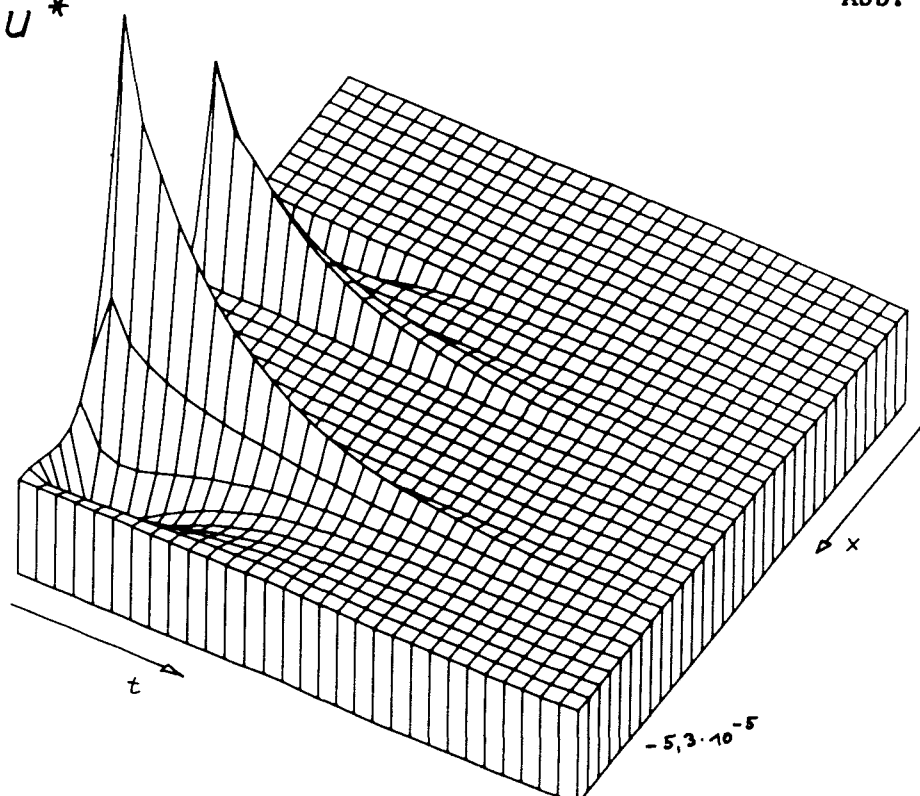


Abb. 39

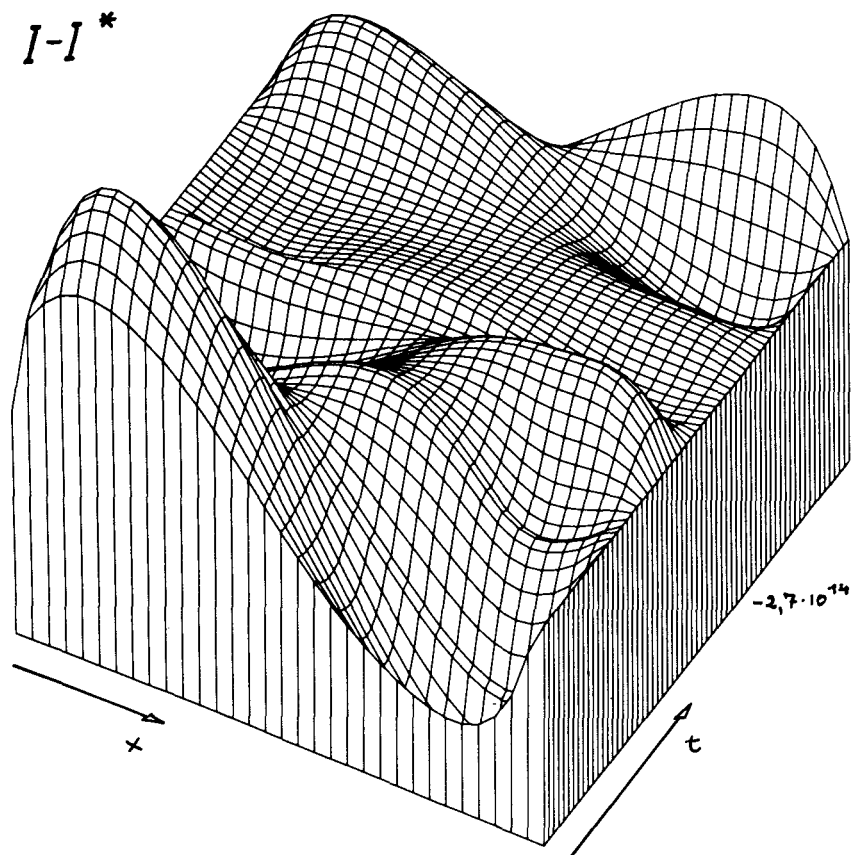
 $I-I^*$ 

Abb. 40

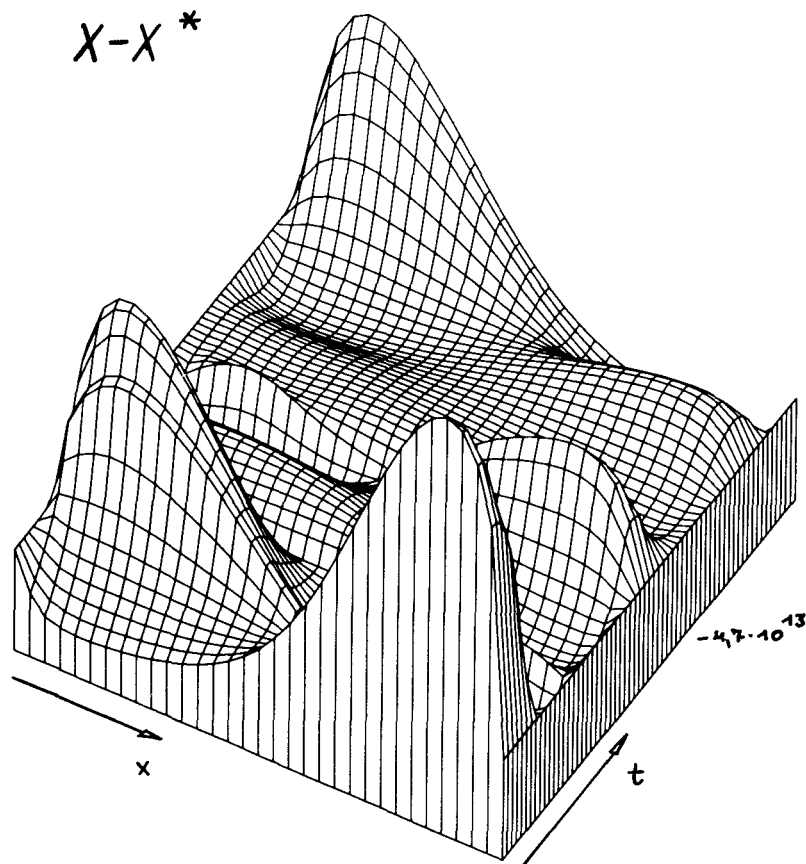
 $X-X^*$ 

Abb. 41

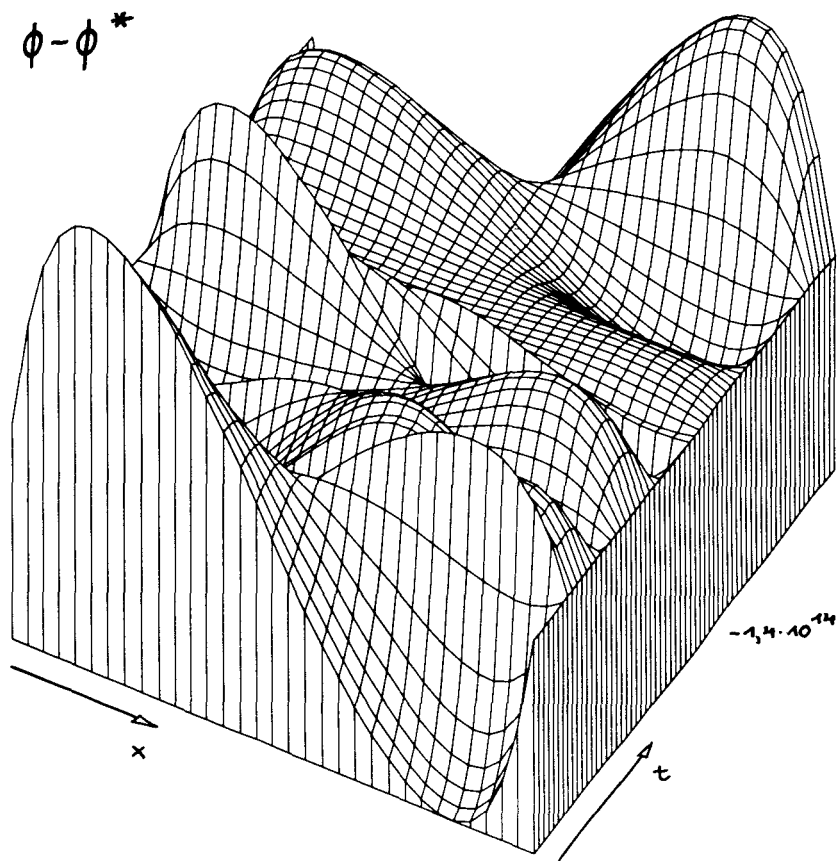
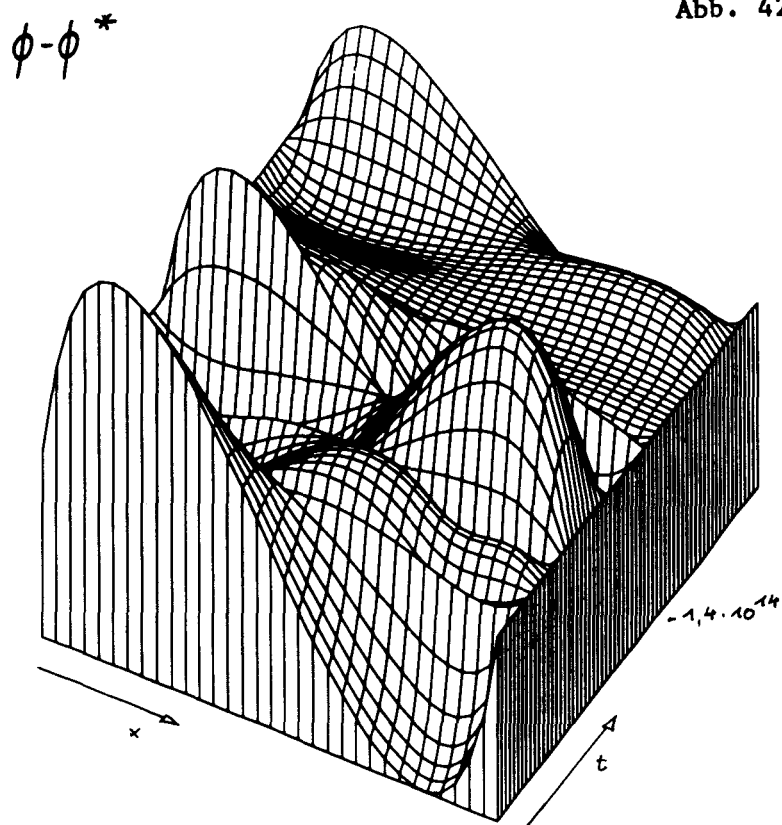


Abb. 42



$I-I^*$ 

Abb. 43

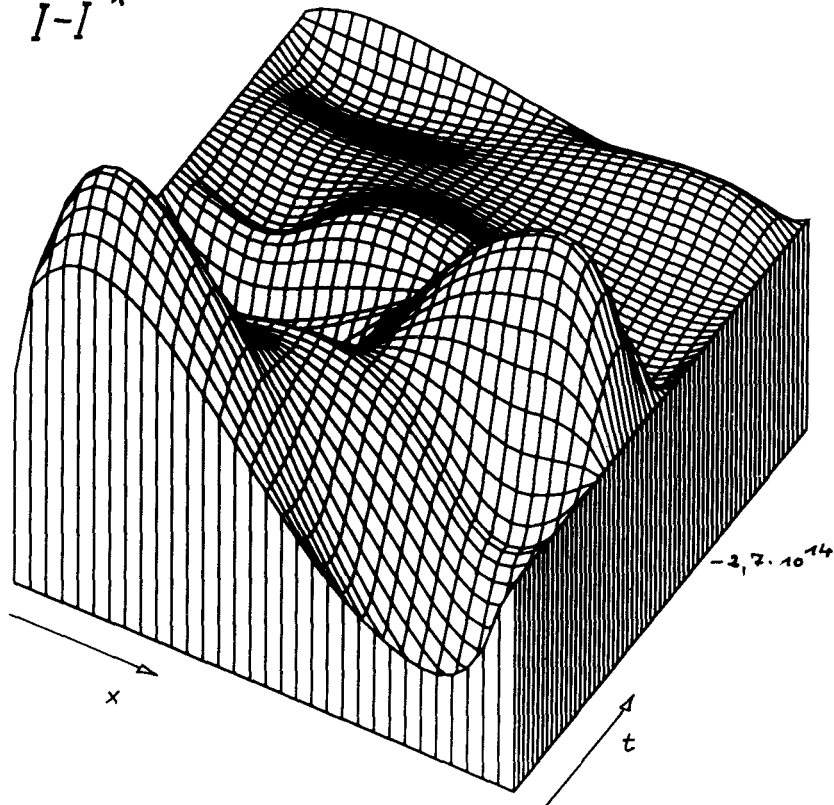
 $X-X^*$ 

Abb. 44

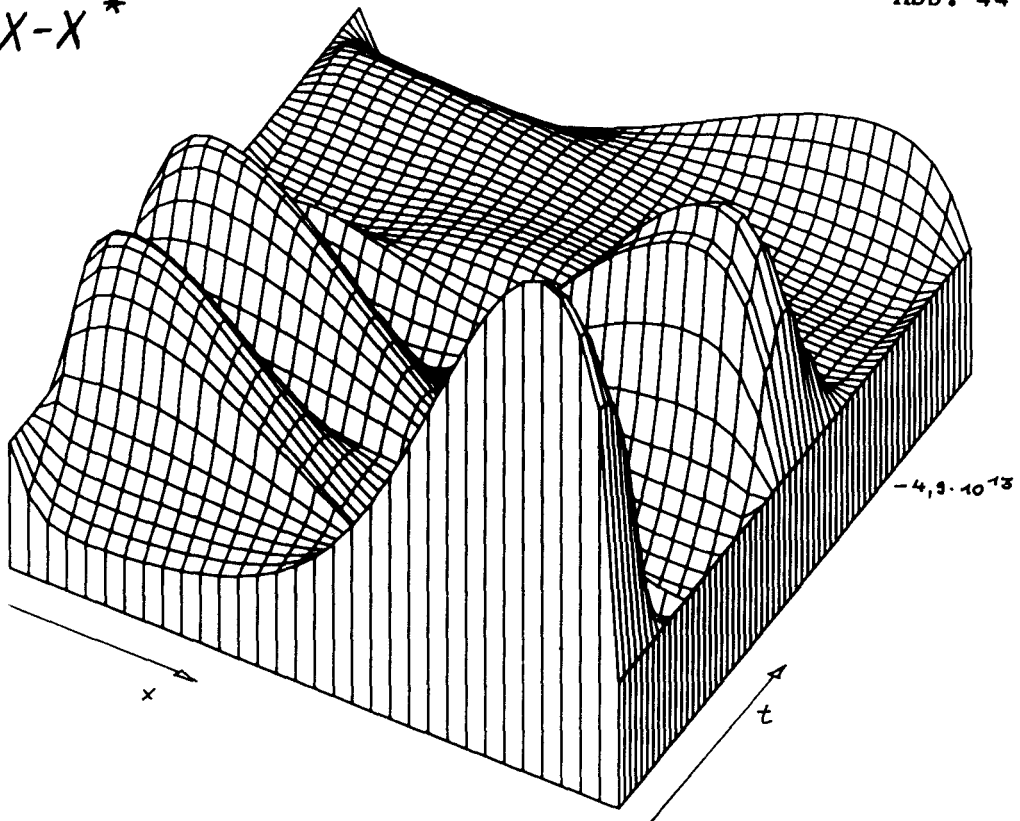


Abb. 45

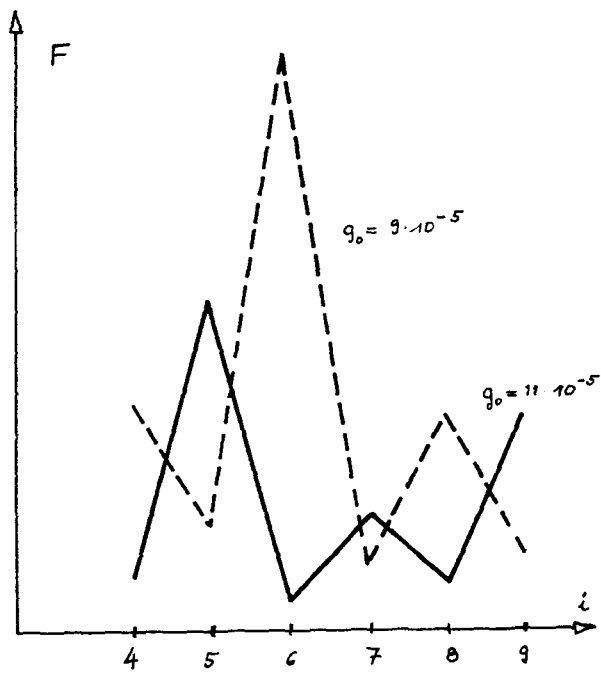


Abb. 46

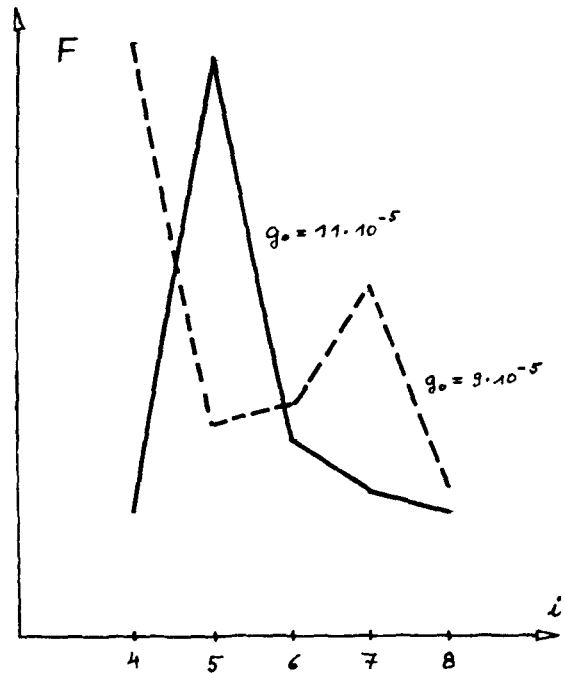


Abb. 47

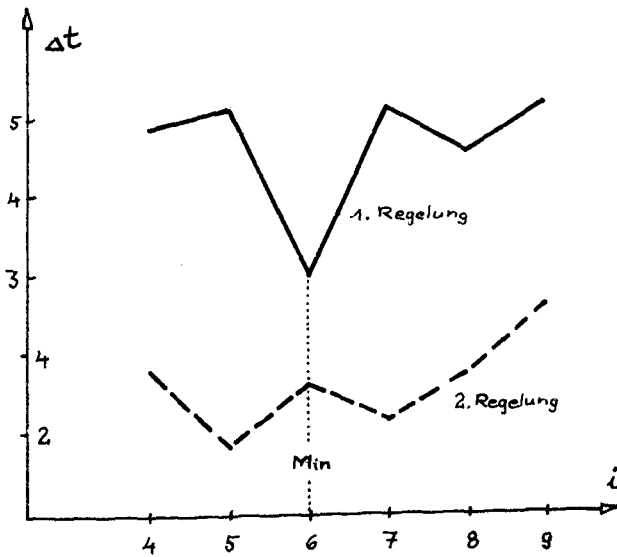


Abb. 48

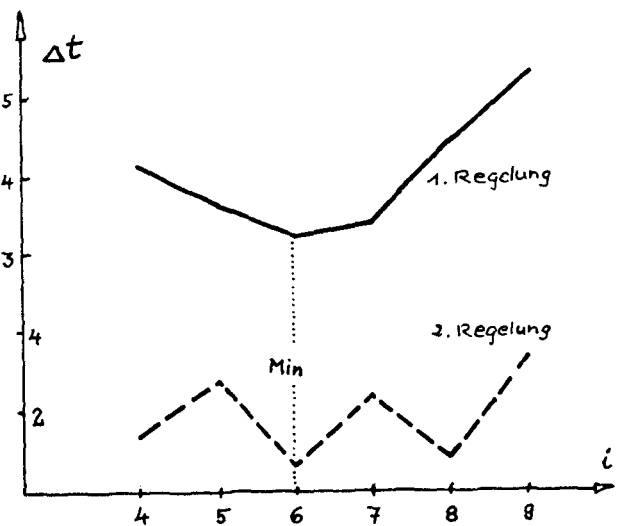


Abb. 49

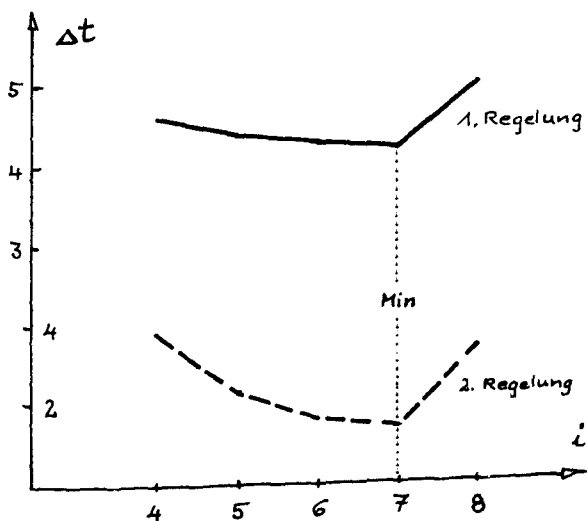


Abb. 50

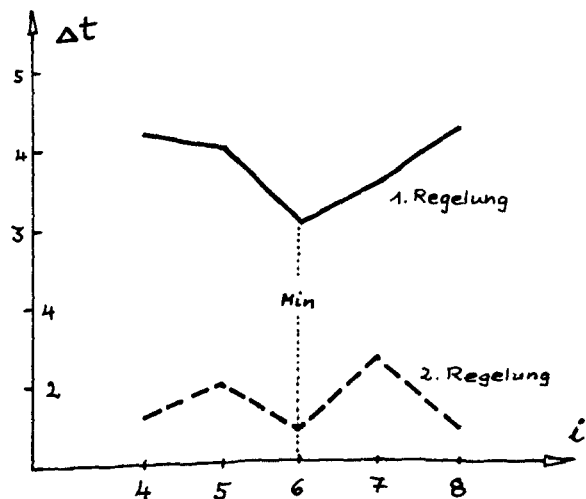


Abb. 51

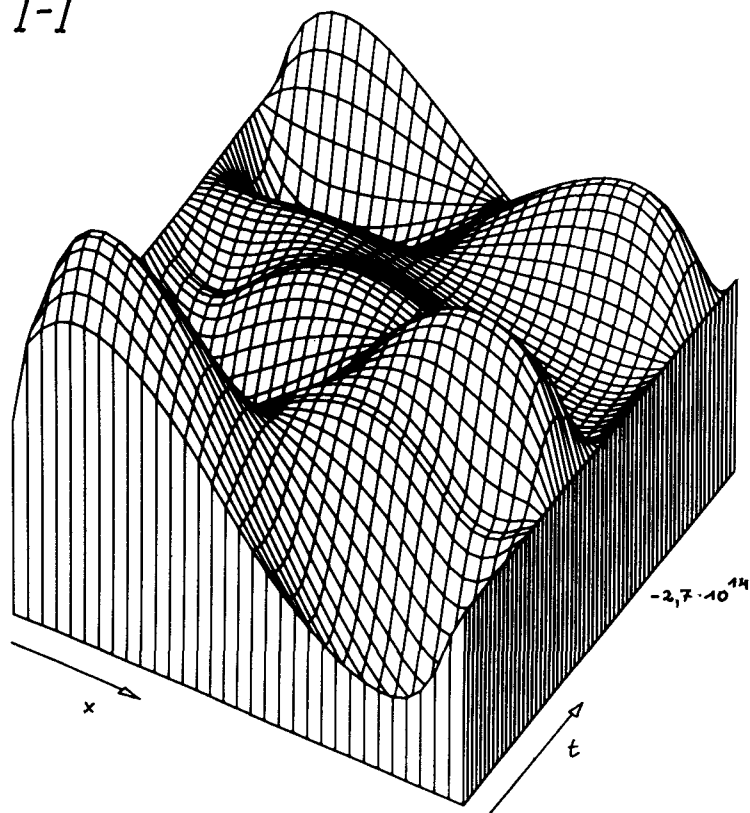
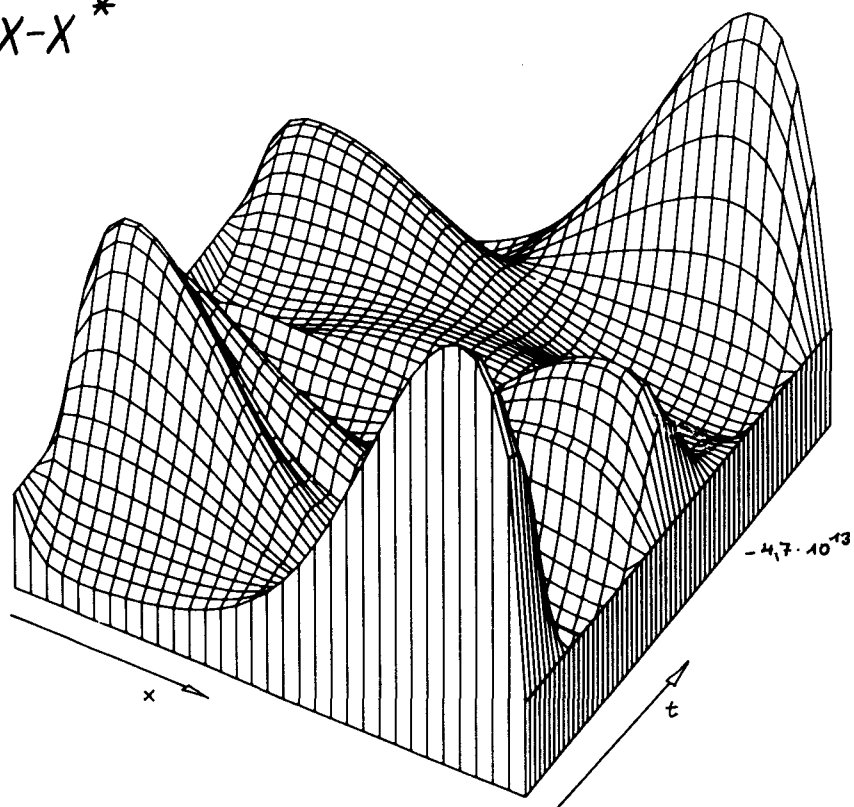
 $I-I^*$ 

Abb. 52

 $X-X^*$ 



$\phi - \phi^*$ 

Abb. 53

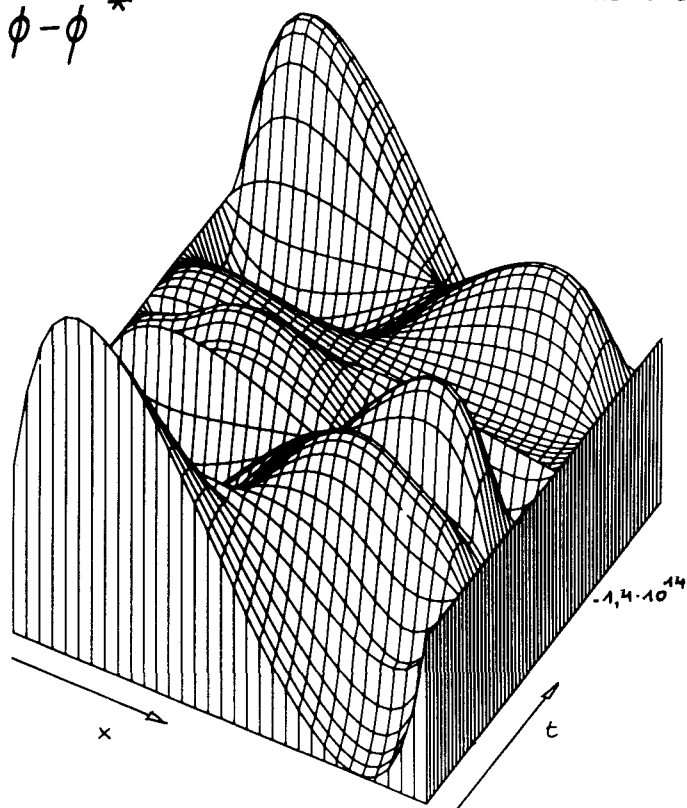
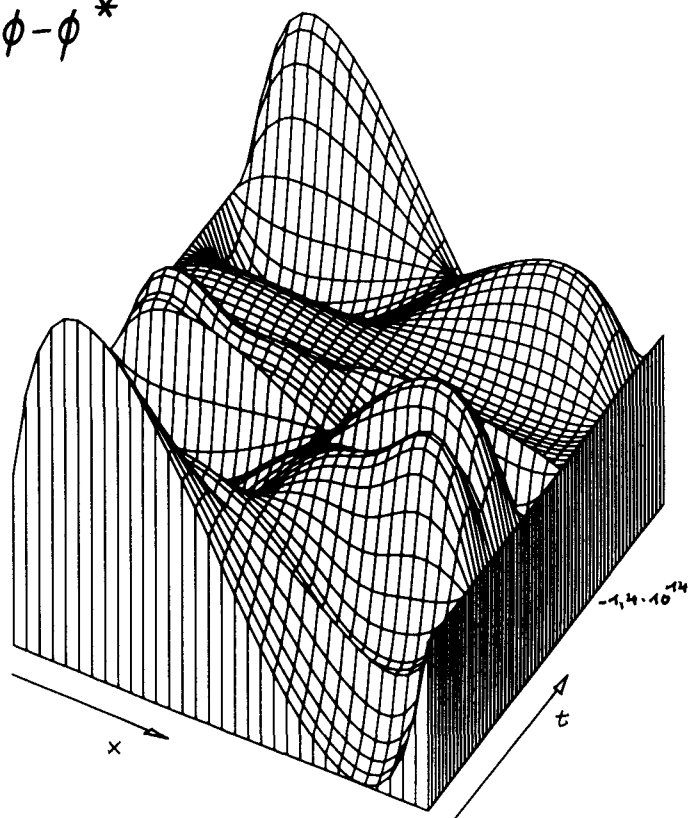

 $\phi - \phi^*$ 

Abb. 54



$I-I^*$ 

Abb. 55

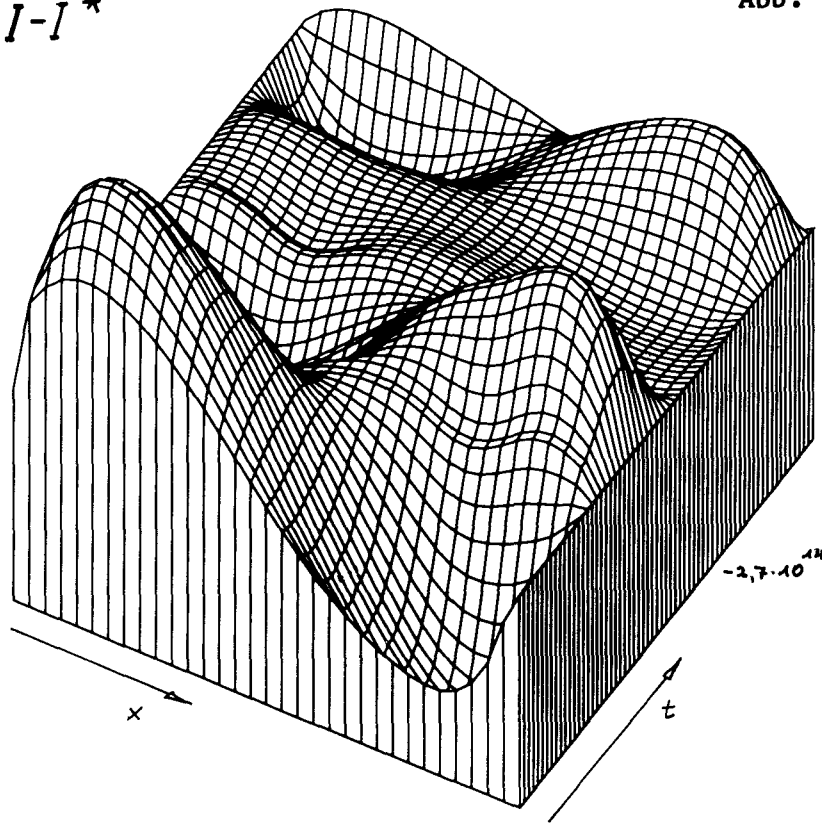
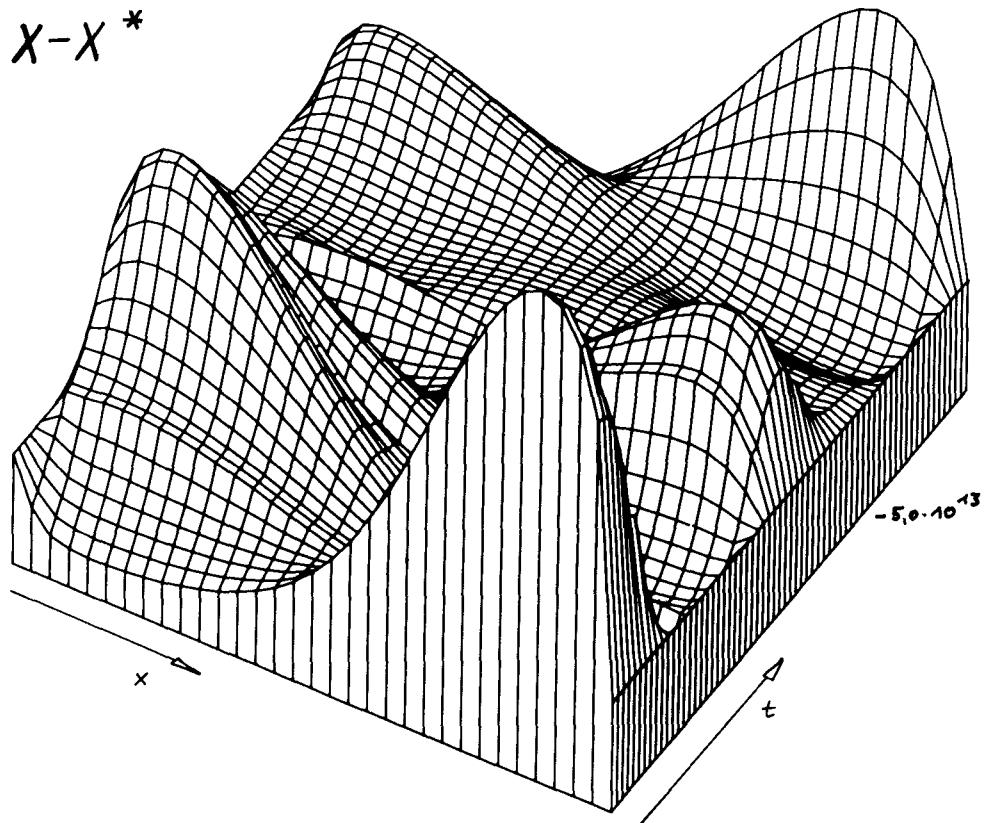
 $X-X^*$ 

Abb. 56



$I-I^*$ 

Abb. 57

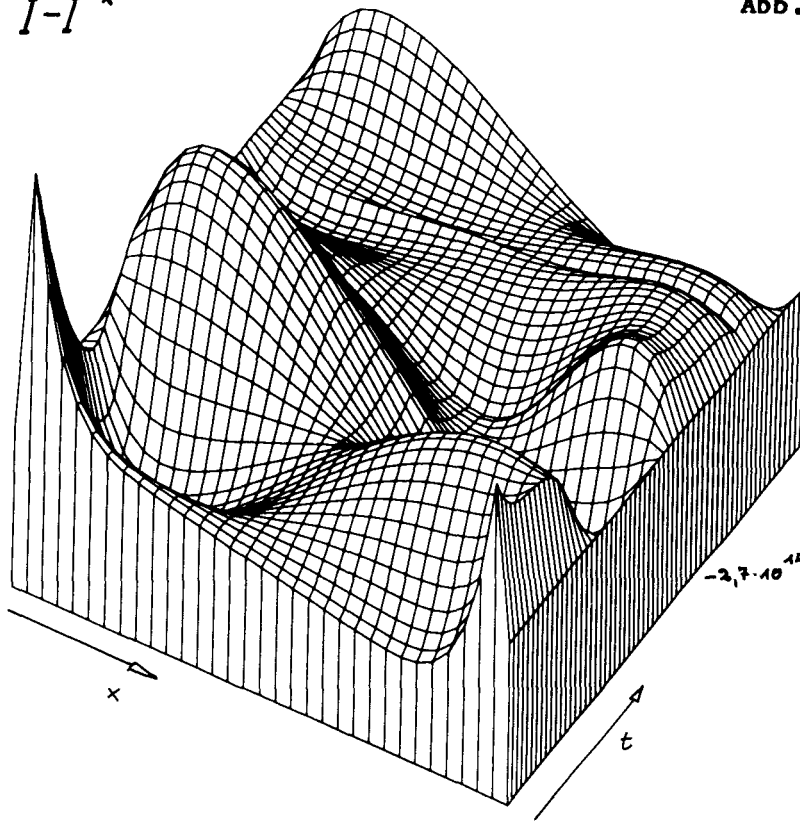
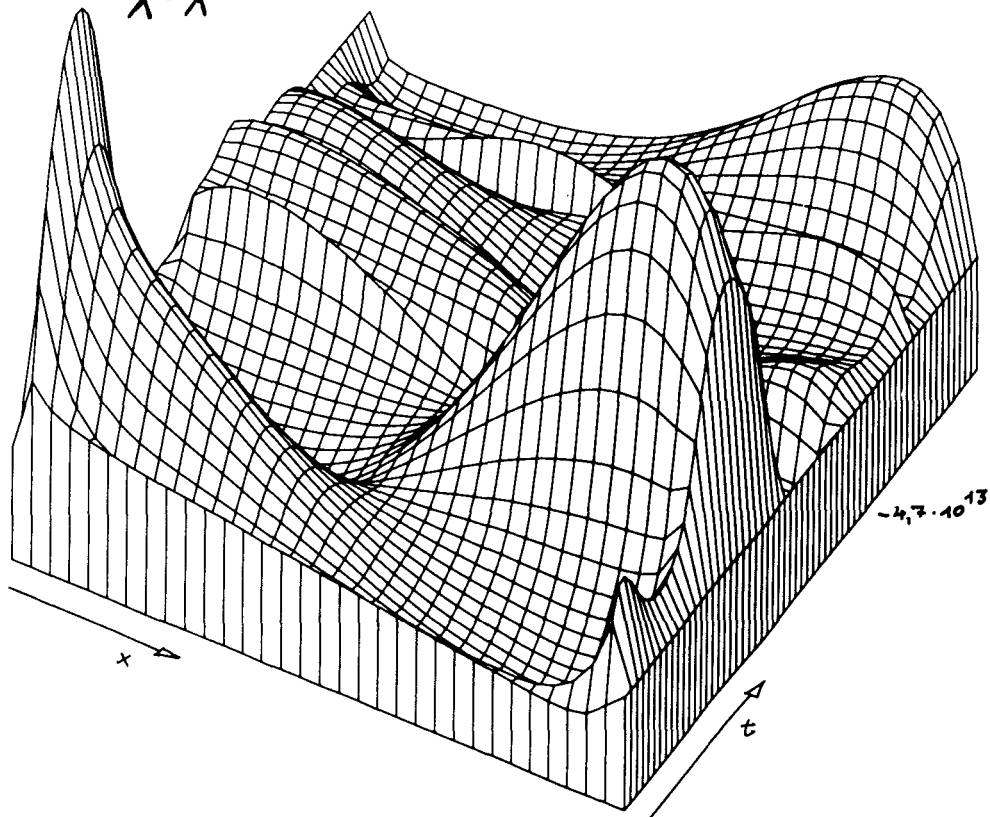
 $X-X^*$ 

Abb. 58



$\phi - \phi^*$ 

Abb. 59

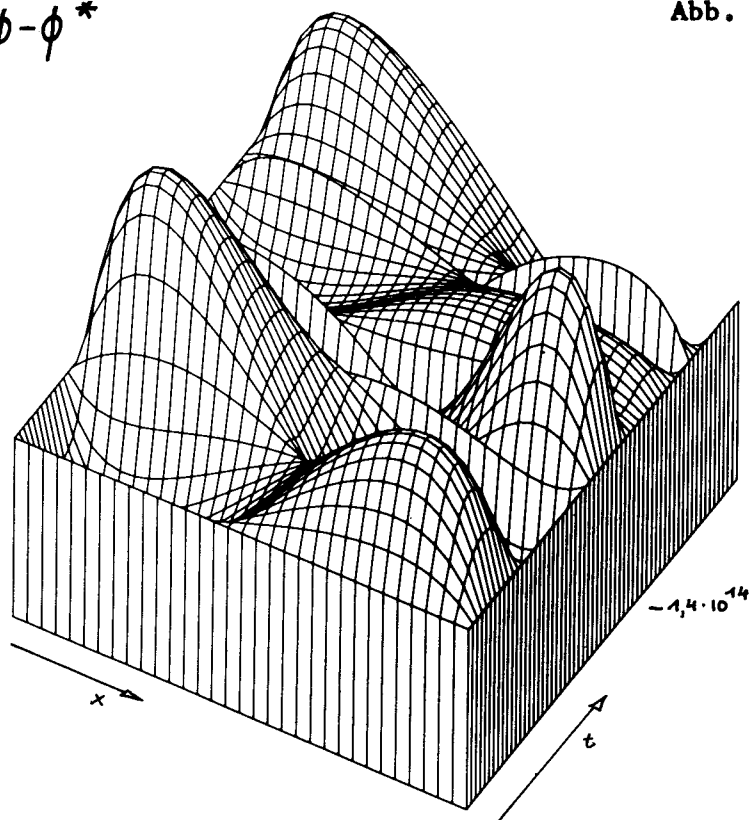
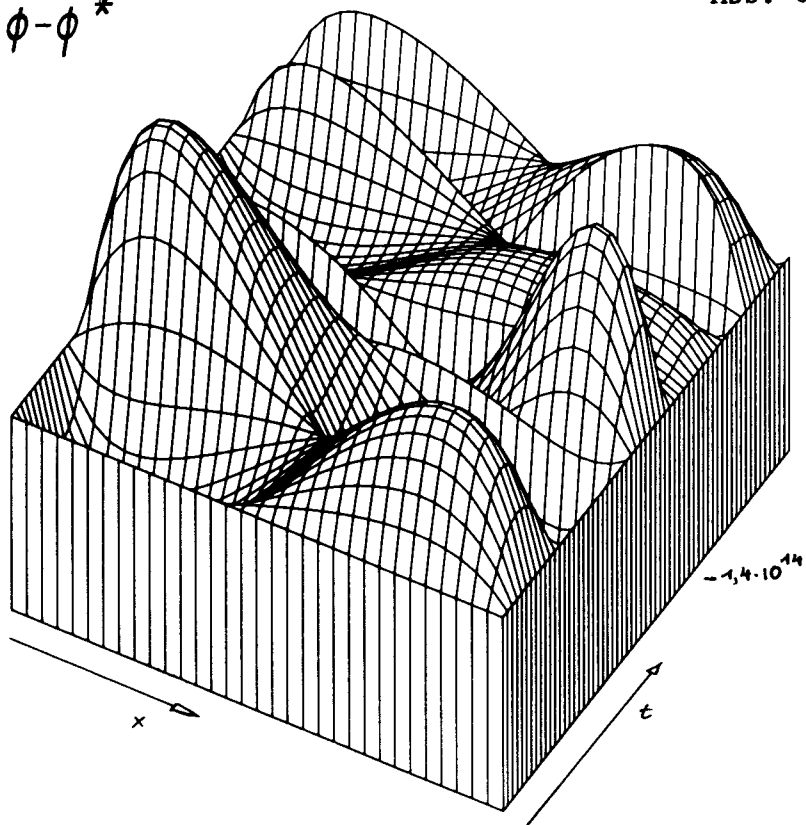

 $\phi - \phi^*$ 

Abb. 60



$I-I^*$ 

Abb. 61

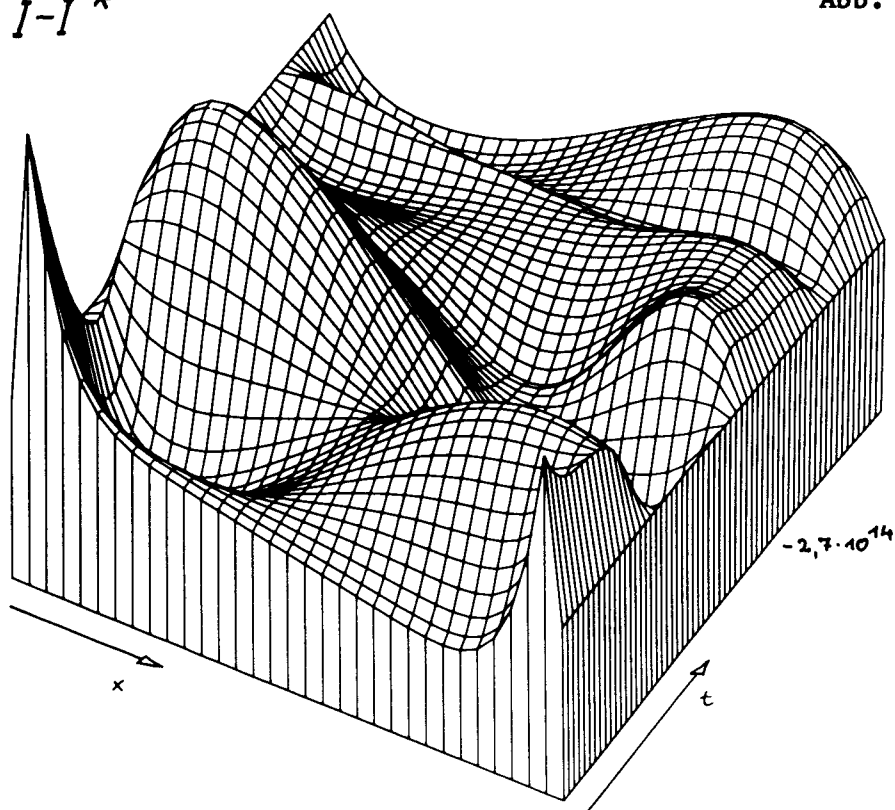
 $X-X^*$ 

Abb. 62

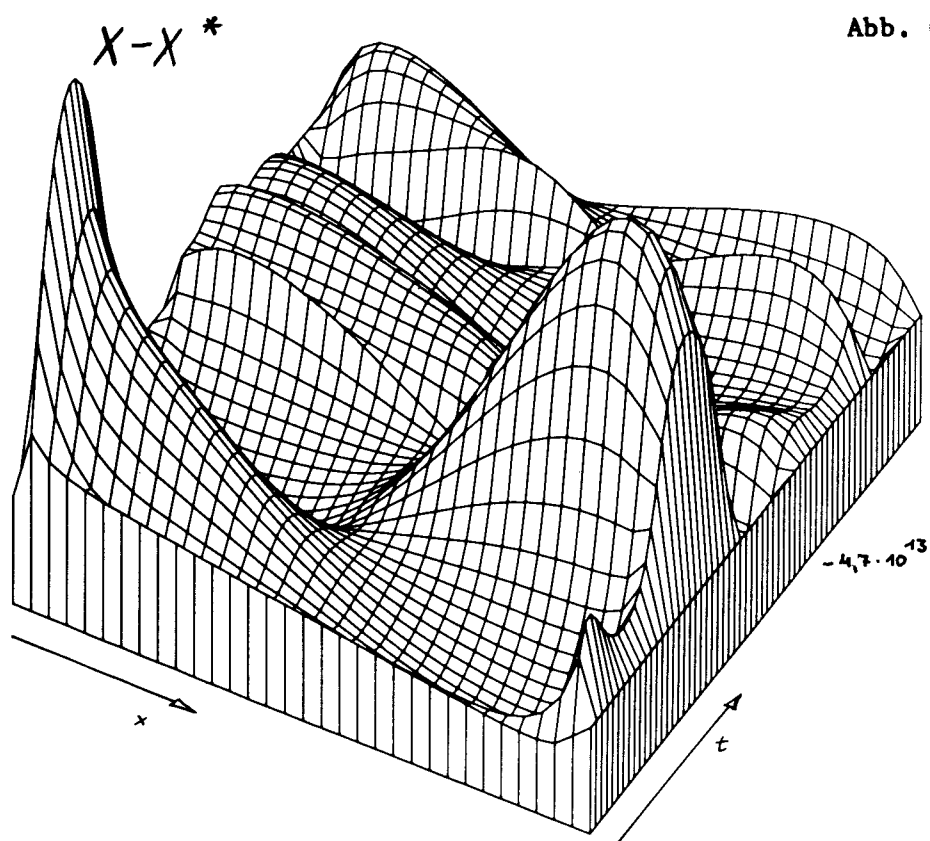


Abb. 63

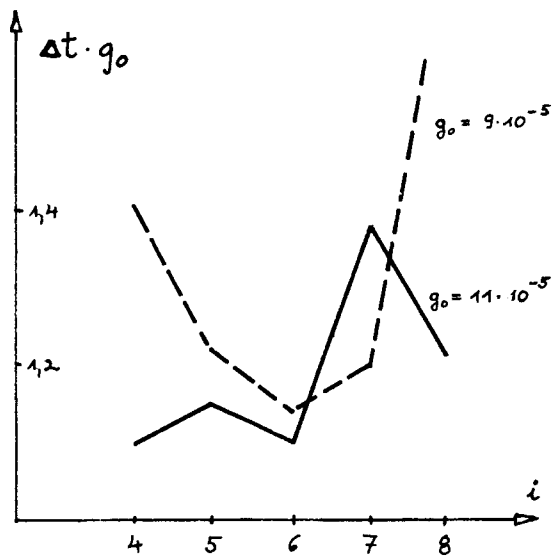


Abb. 64

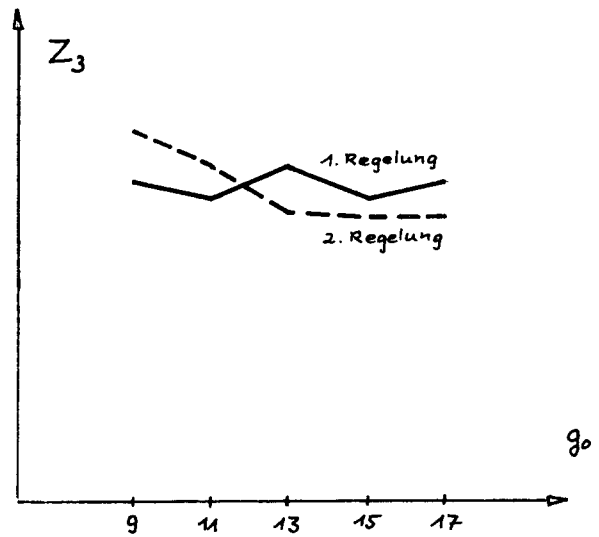


Abb. 65

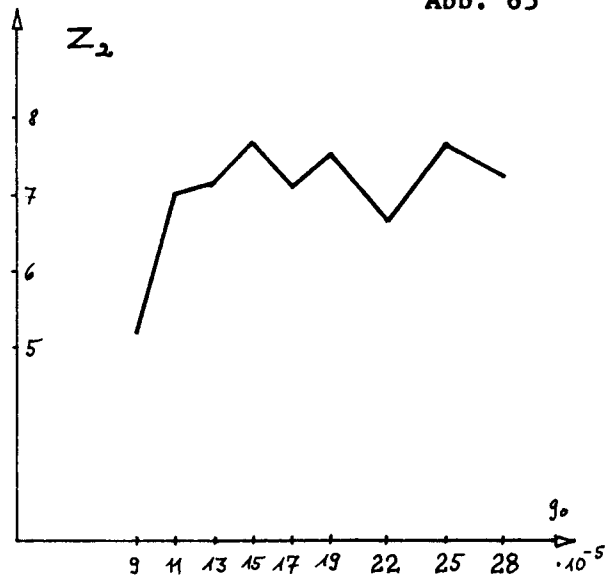


Abb. 66

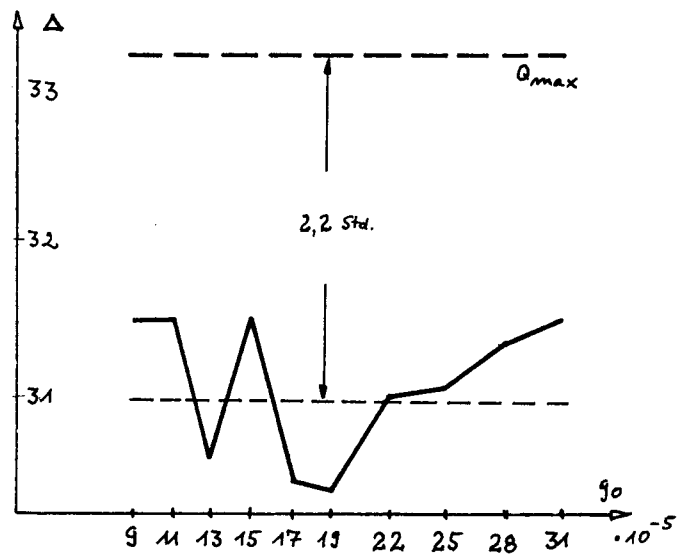


Abb. 67

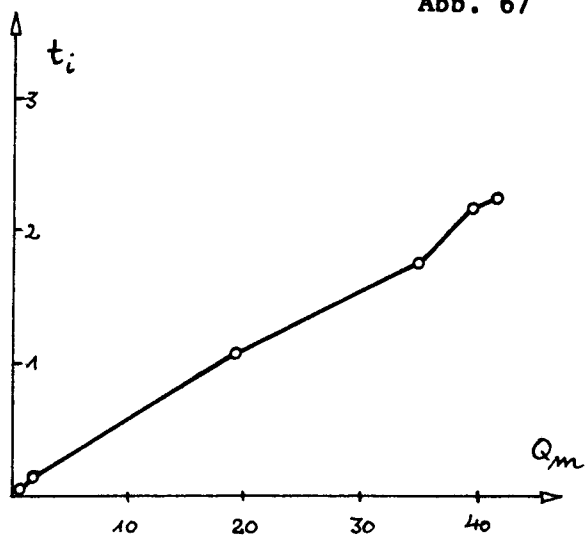
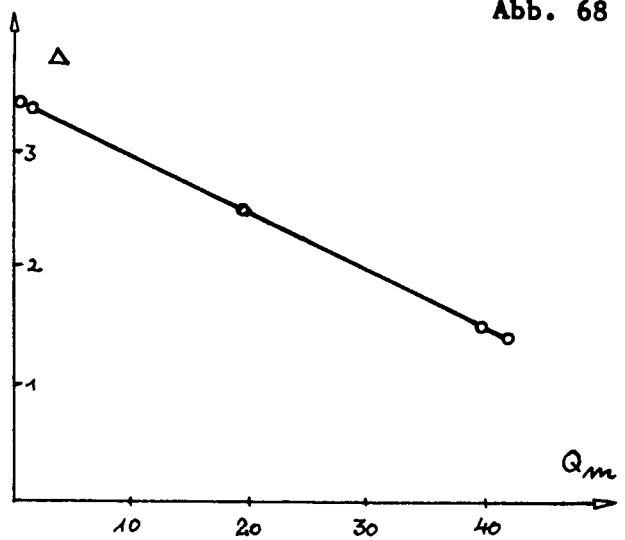


Abb. 68



$I-I^*$ 

Abb. 69

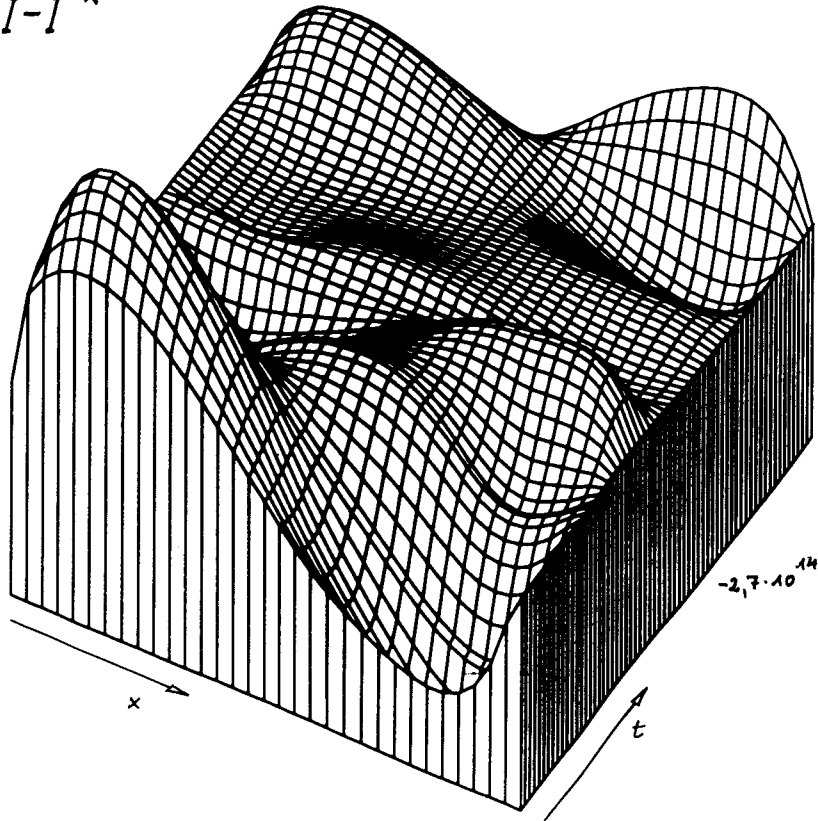
 $I-I^*$ 

Abb. 70

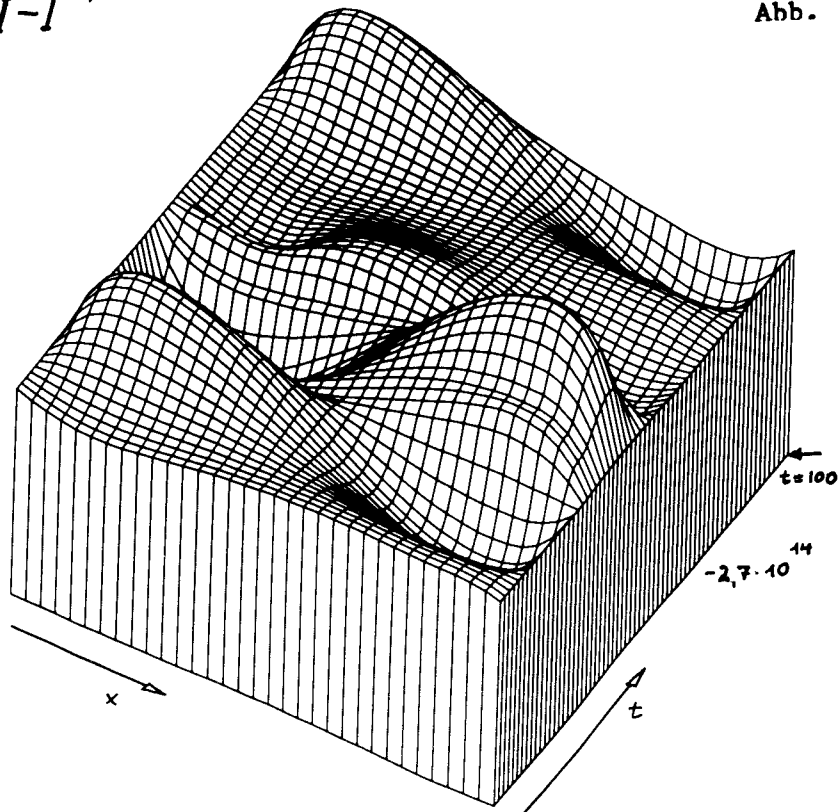


Abb. 71

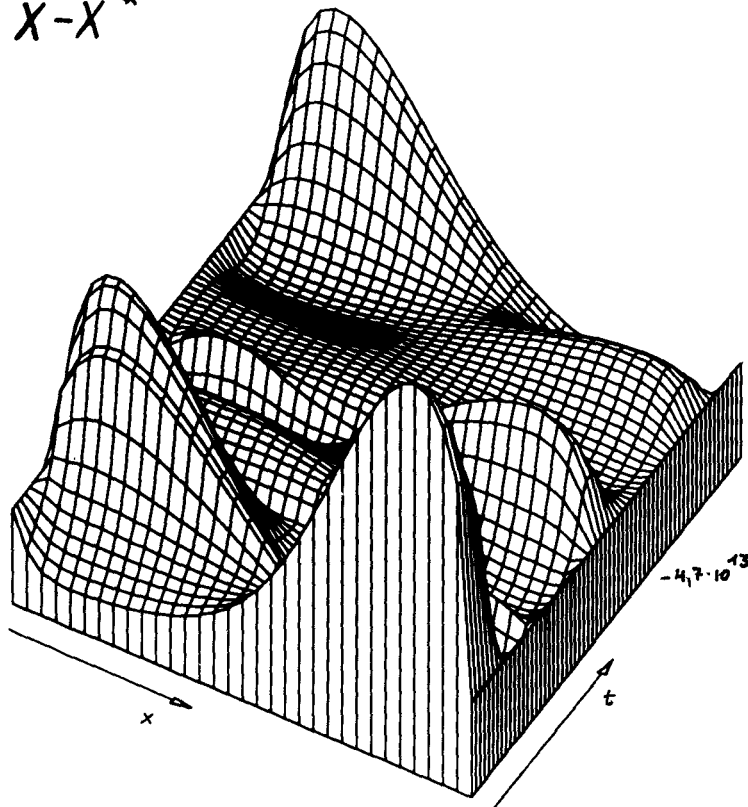
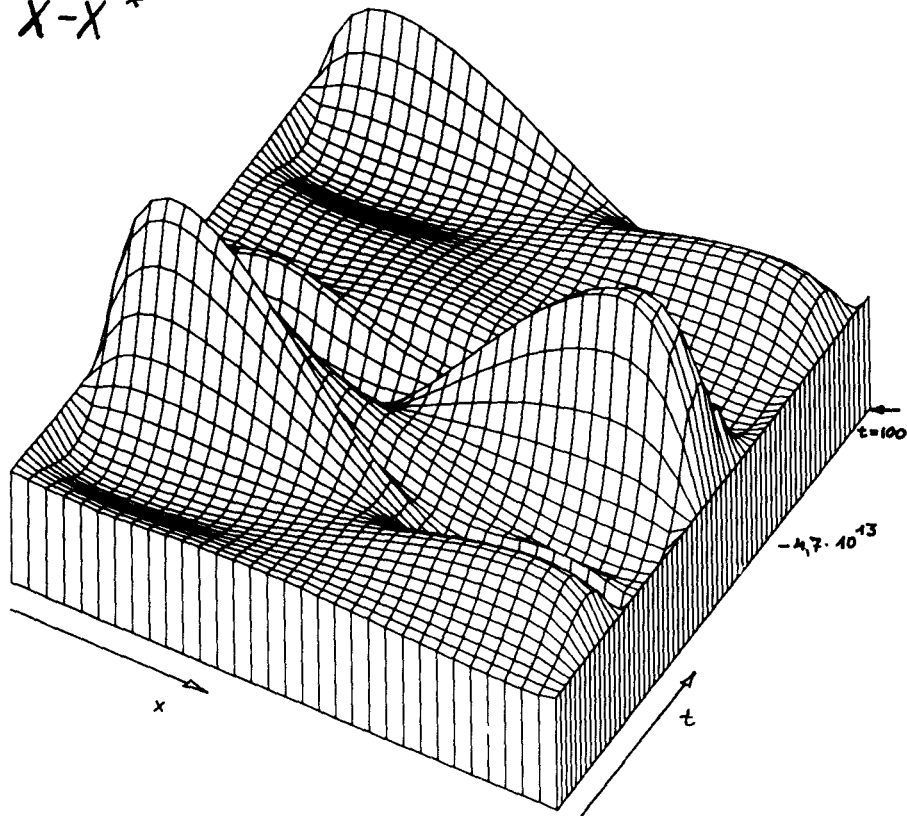
 $X-X^*$ 

Abb. 72

 $X-X^*$ 



$\phi - \phi^*$ 

Abb. 73

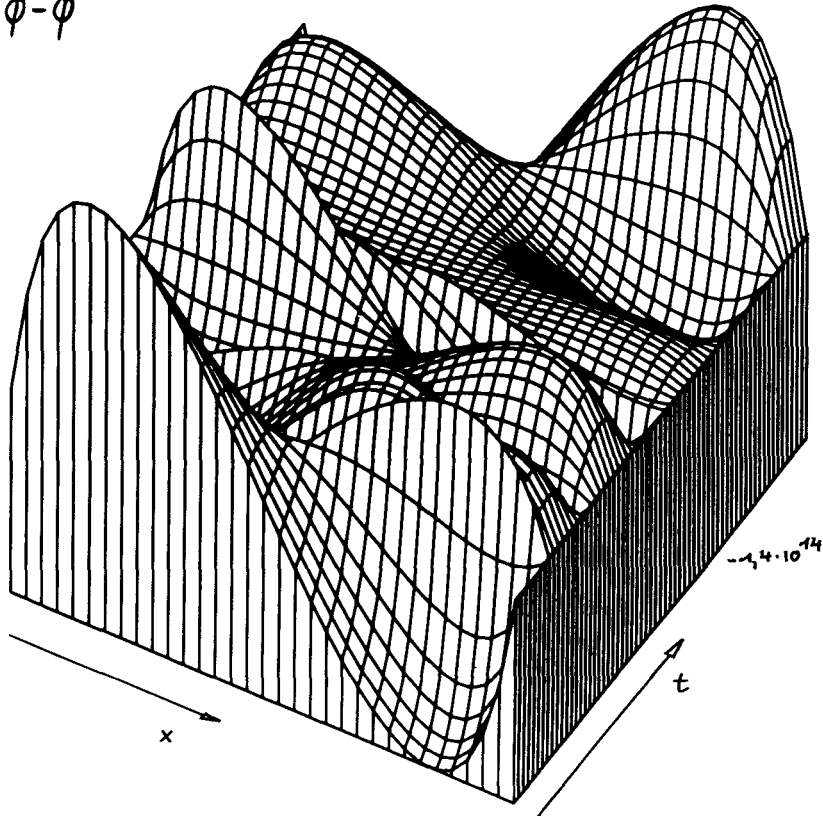
 $\phi - \phi^*$ 

Abb. 74

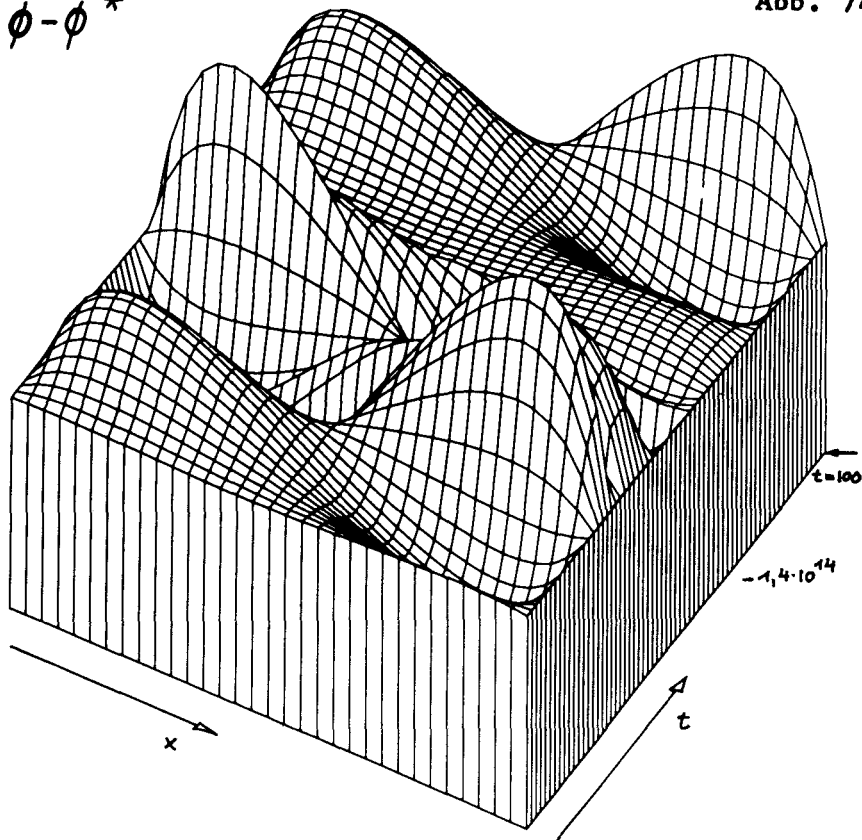


Abb. 75

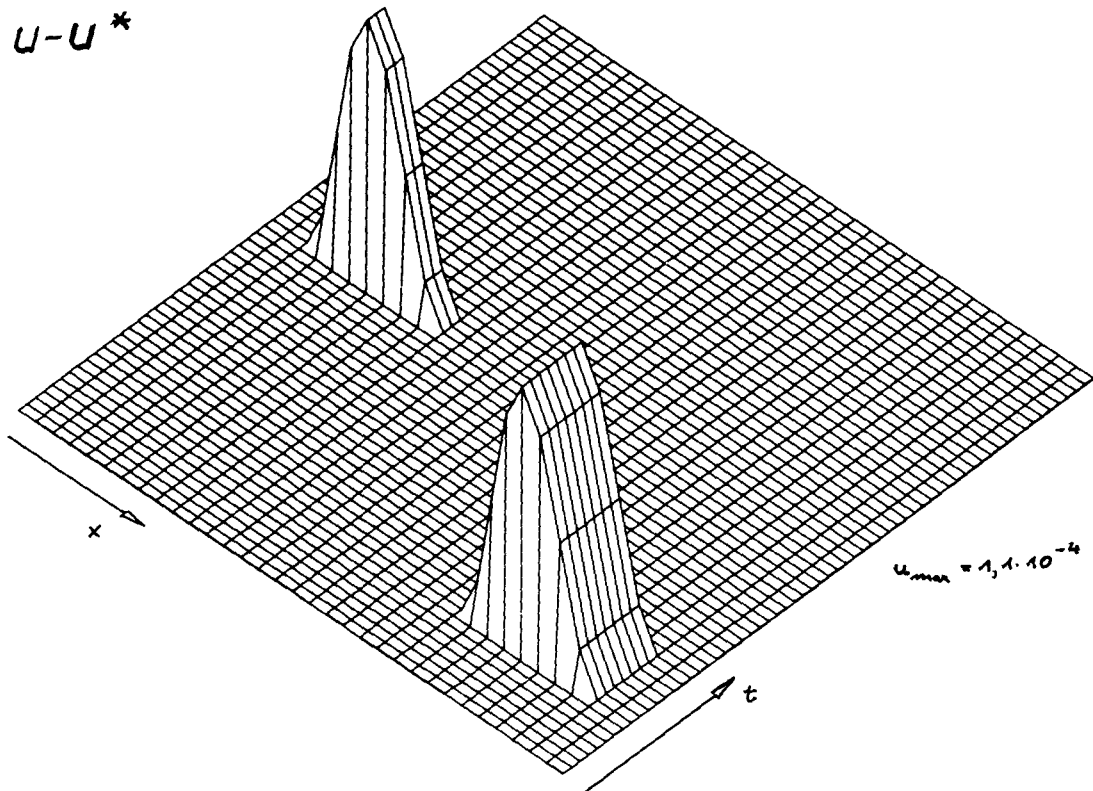


Abb. 76

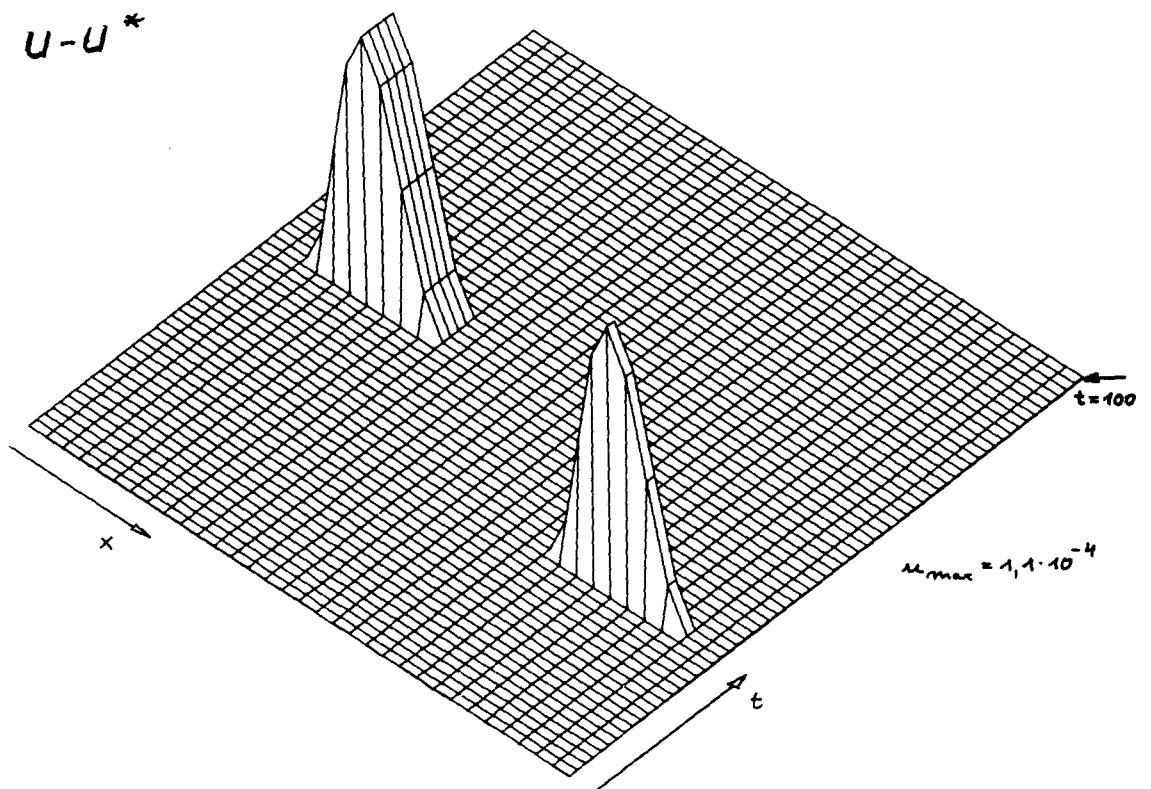


Abb. 77

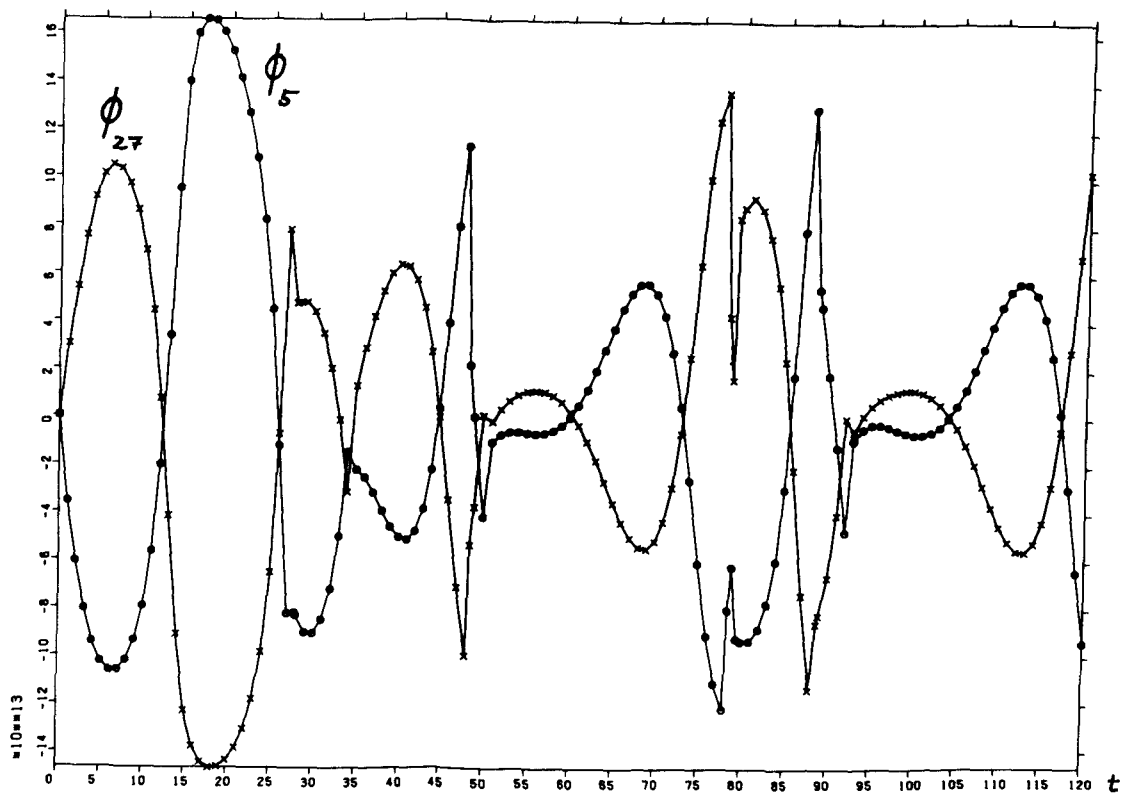


Abb. 78

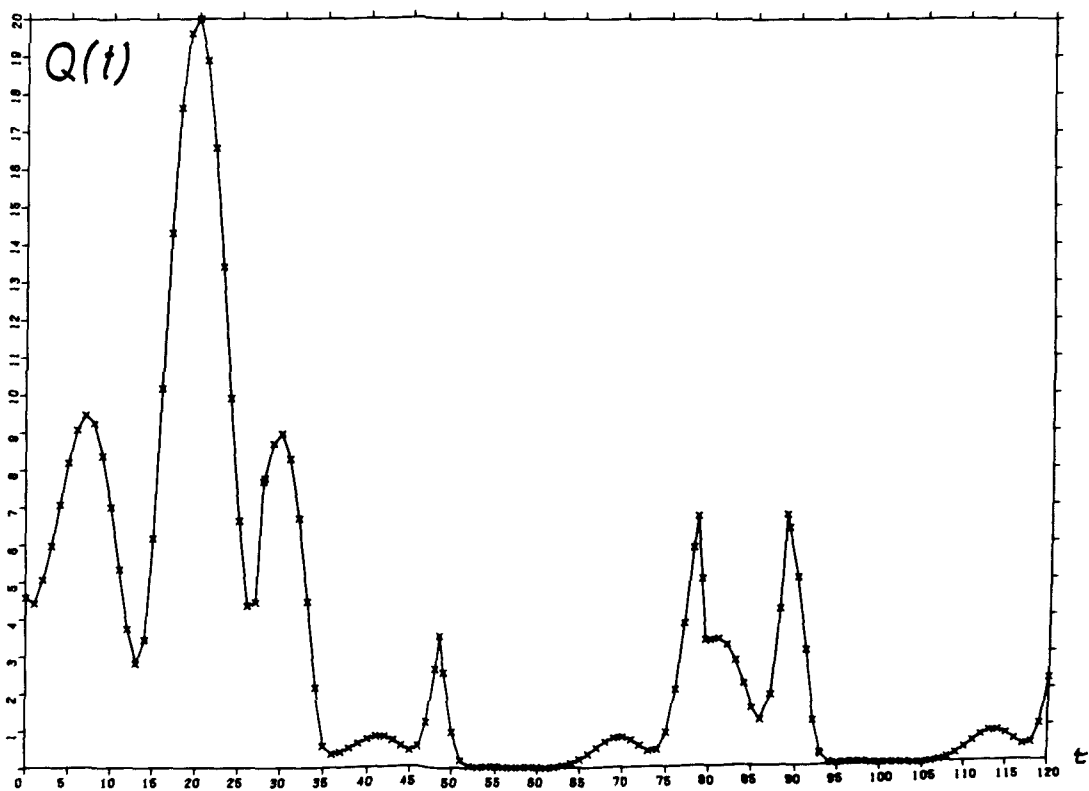


Abb. 79

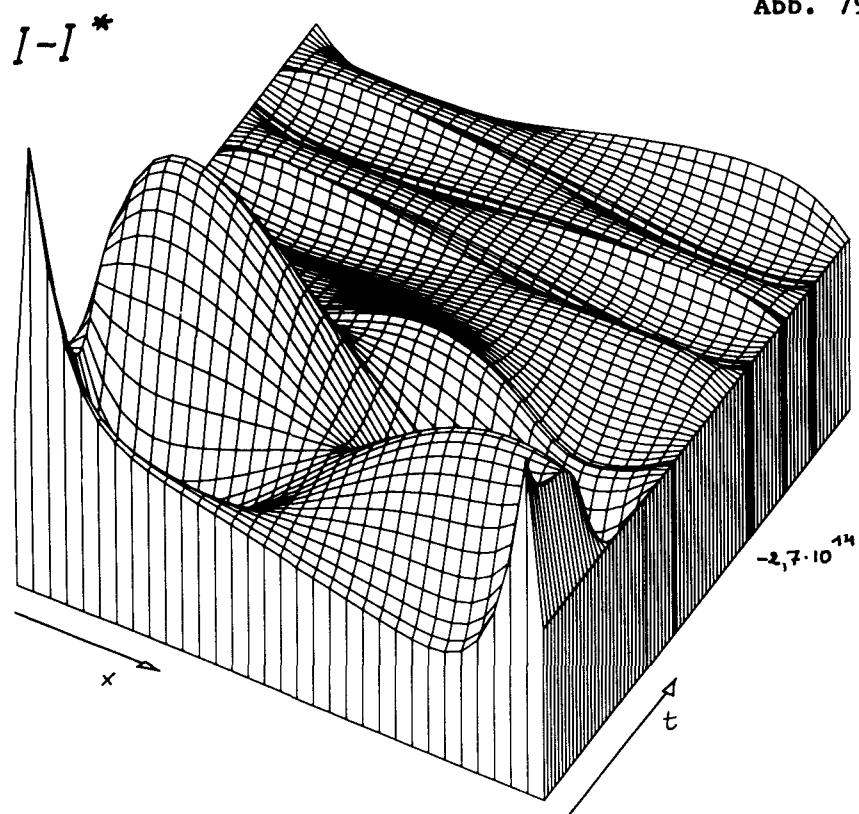
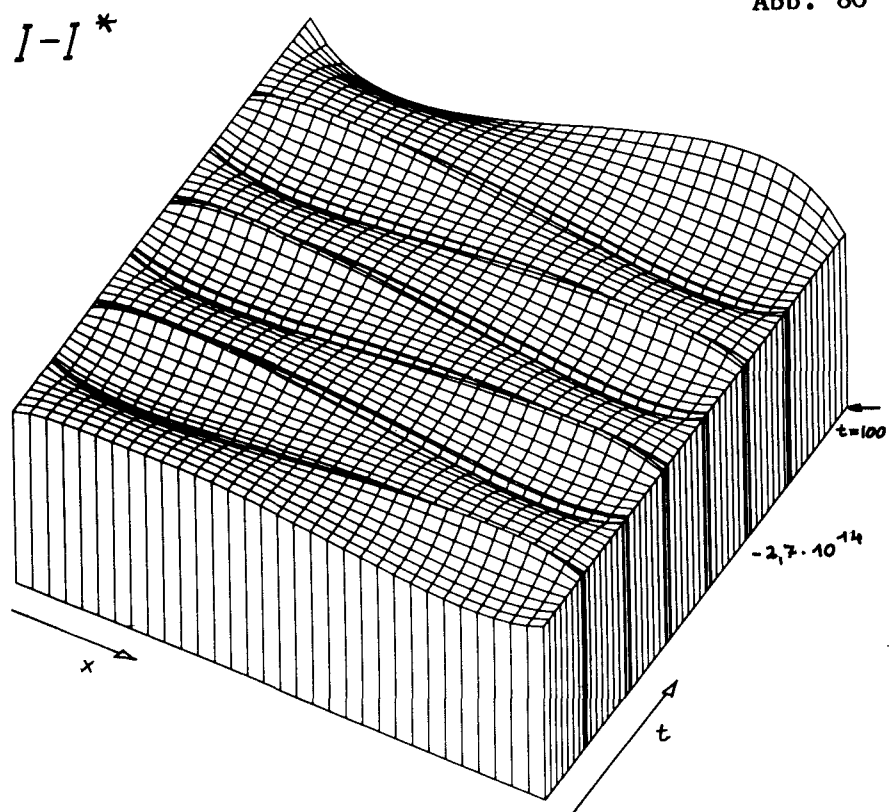
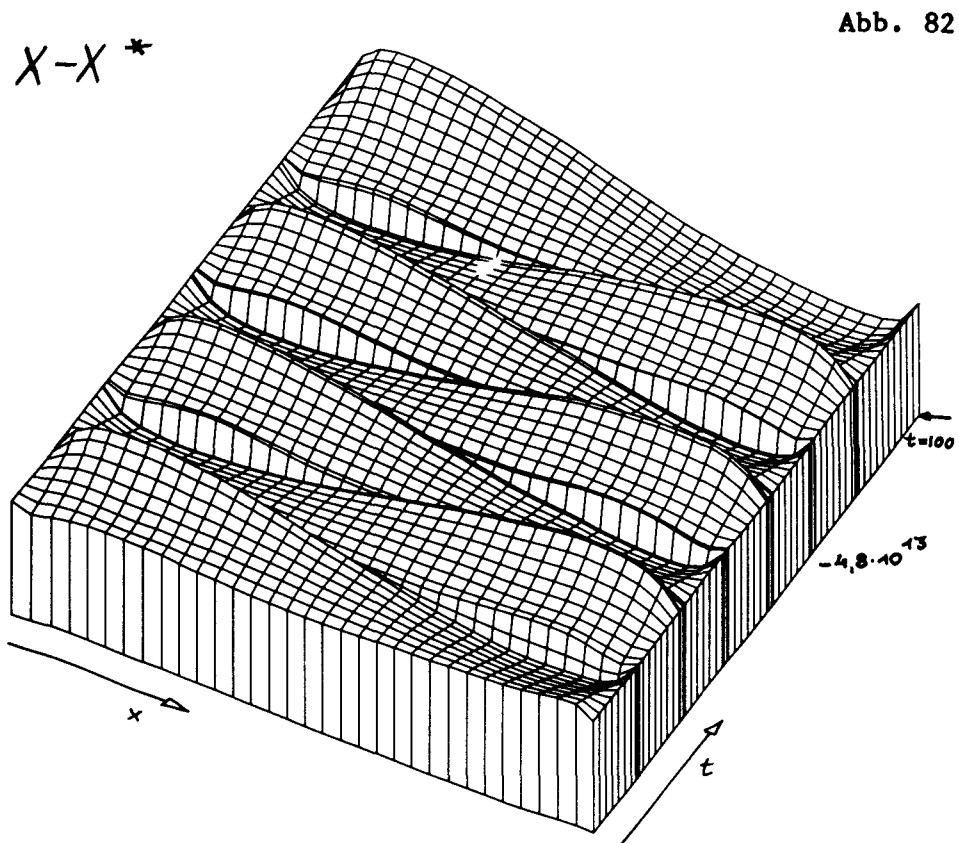
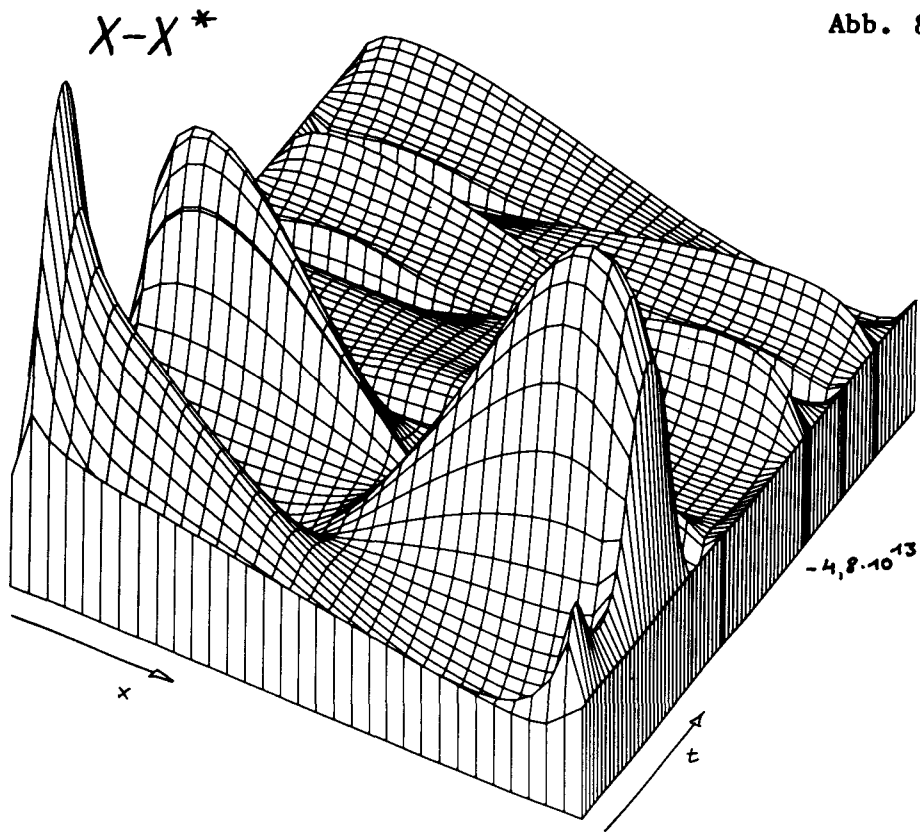


Abb. 80





$\phi - \phi^*$ 

Abb. 83

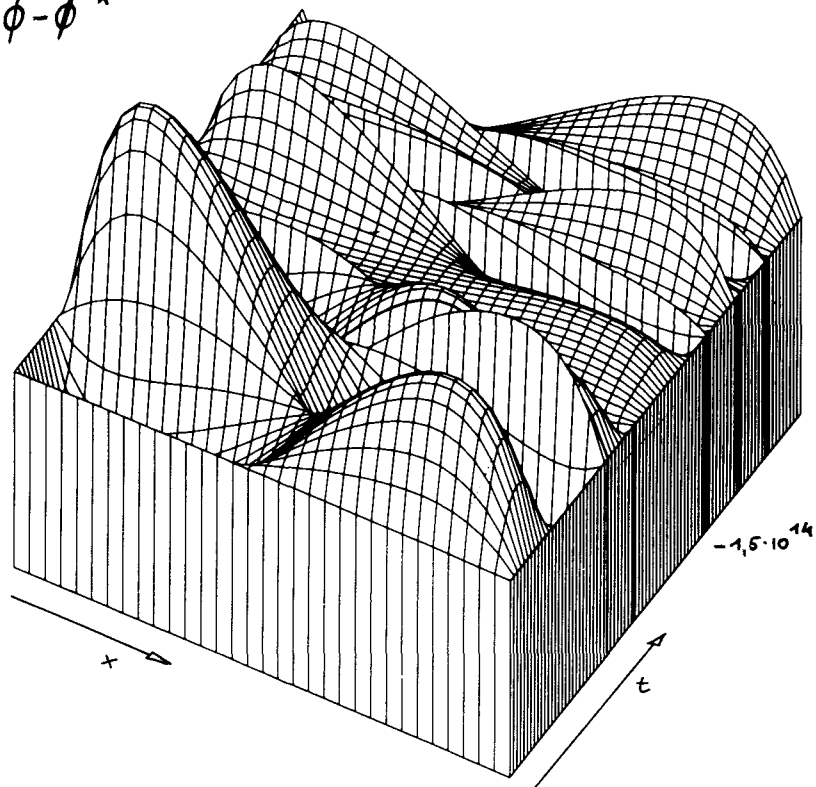
 $\phi - \phi^*$ 

Abb. 84

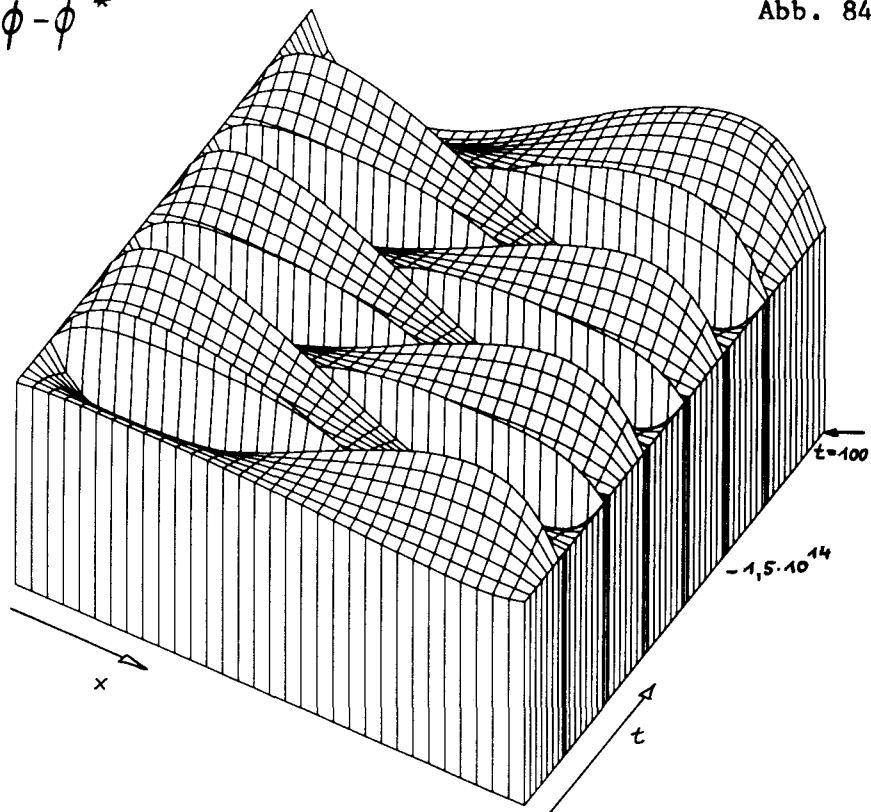


Abb. 85

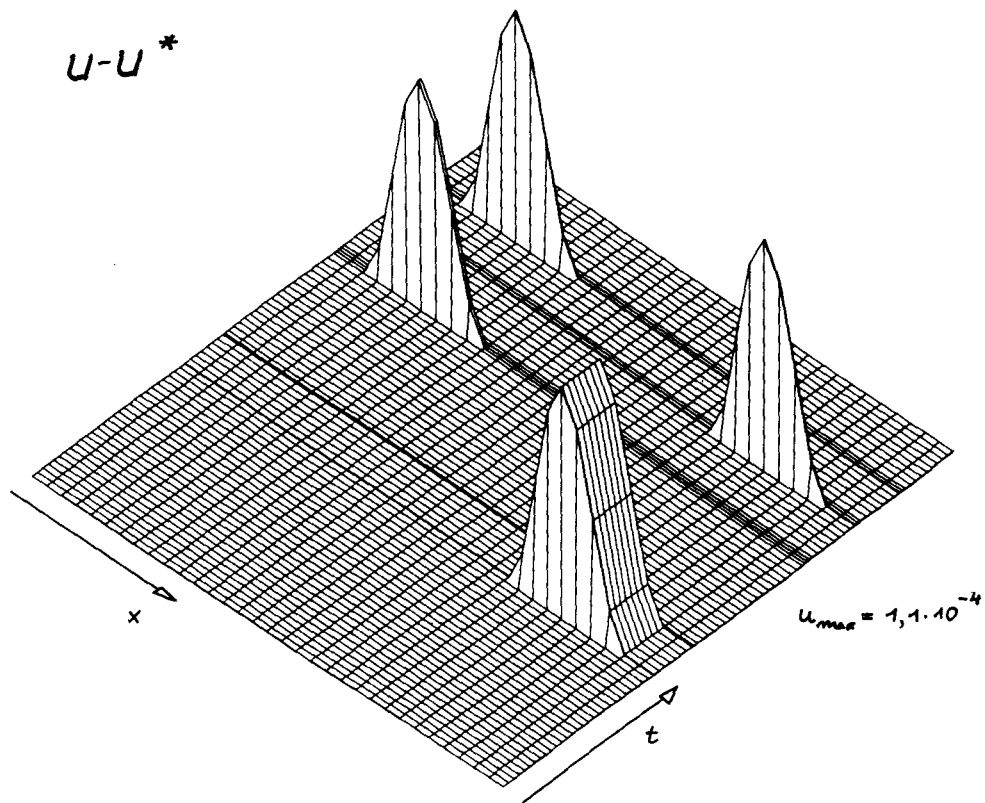


Abb. 86

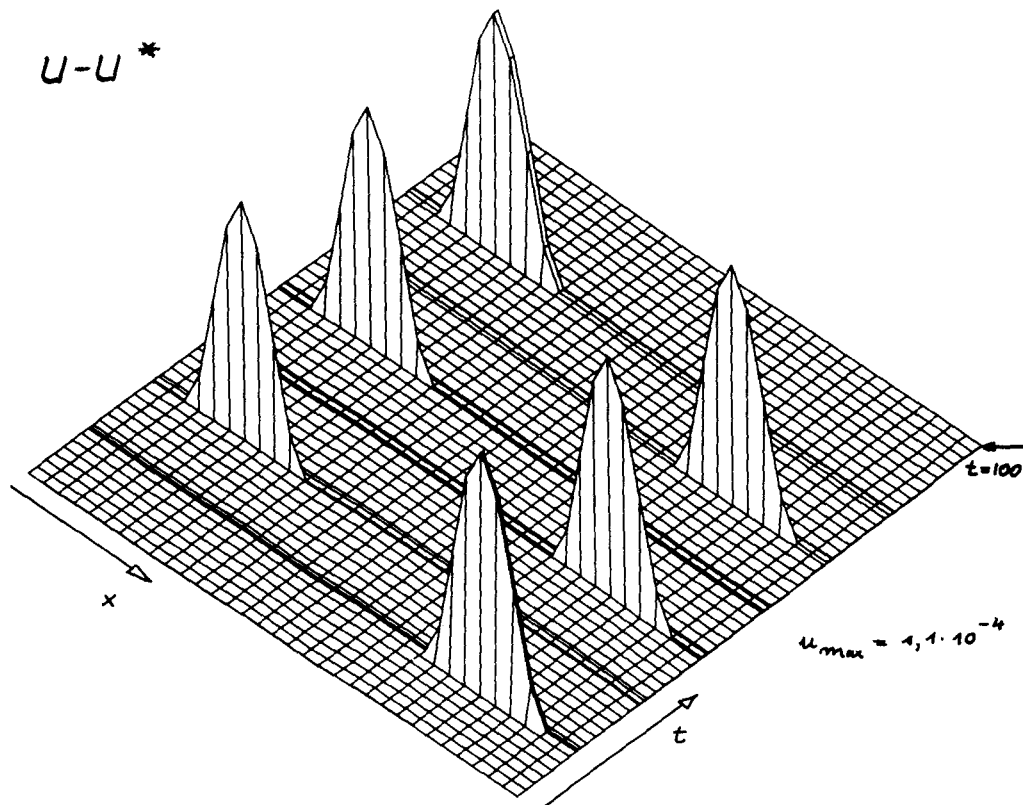


Abb. 87

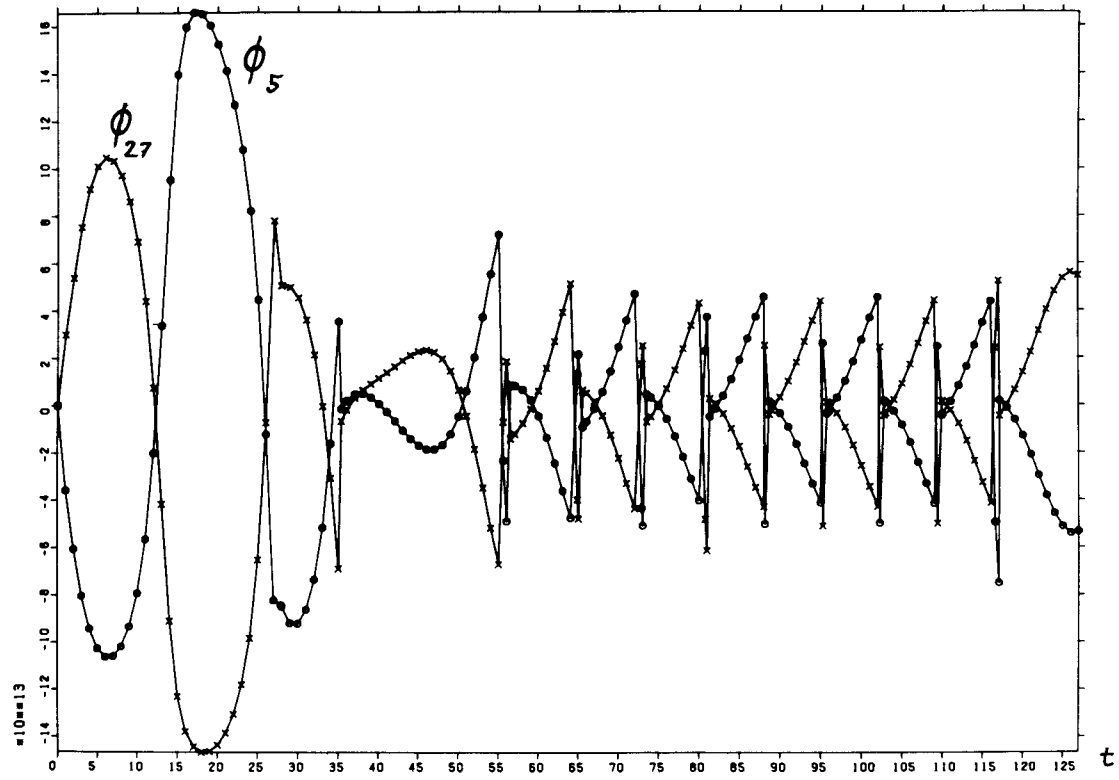


Abb. 88

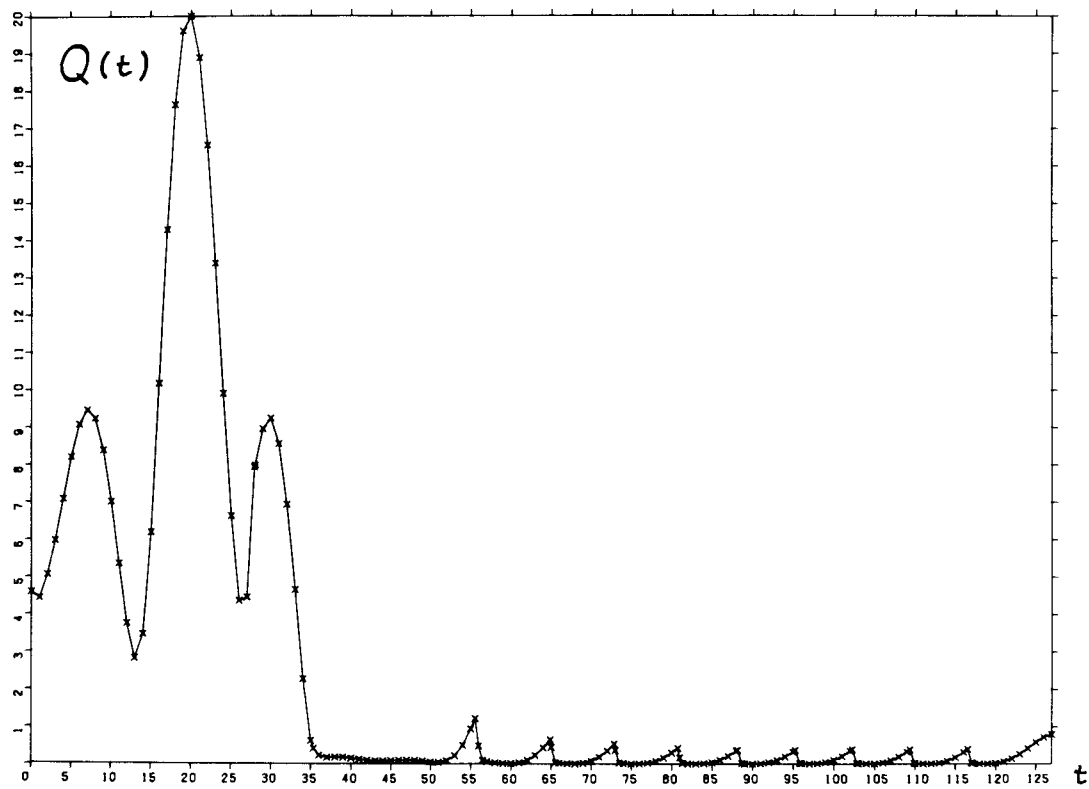




Abb. 89

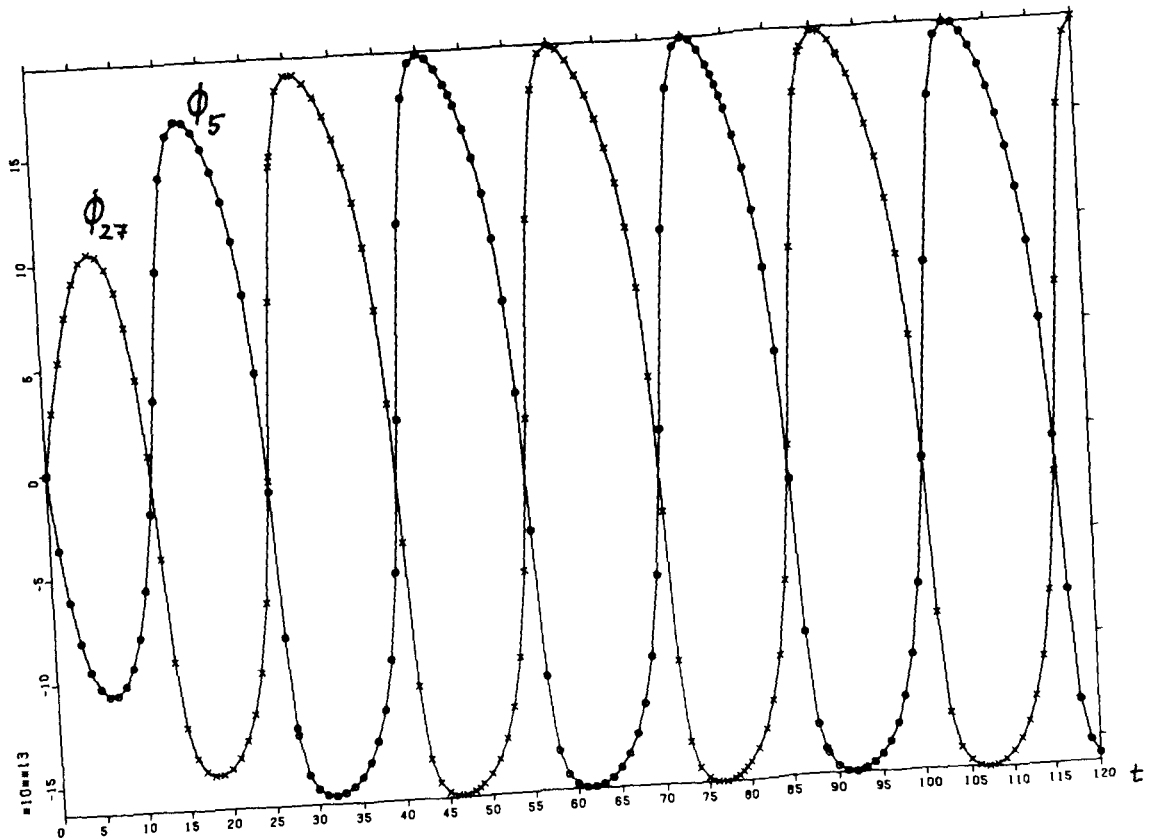


Abb. 90

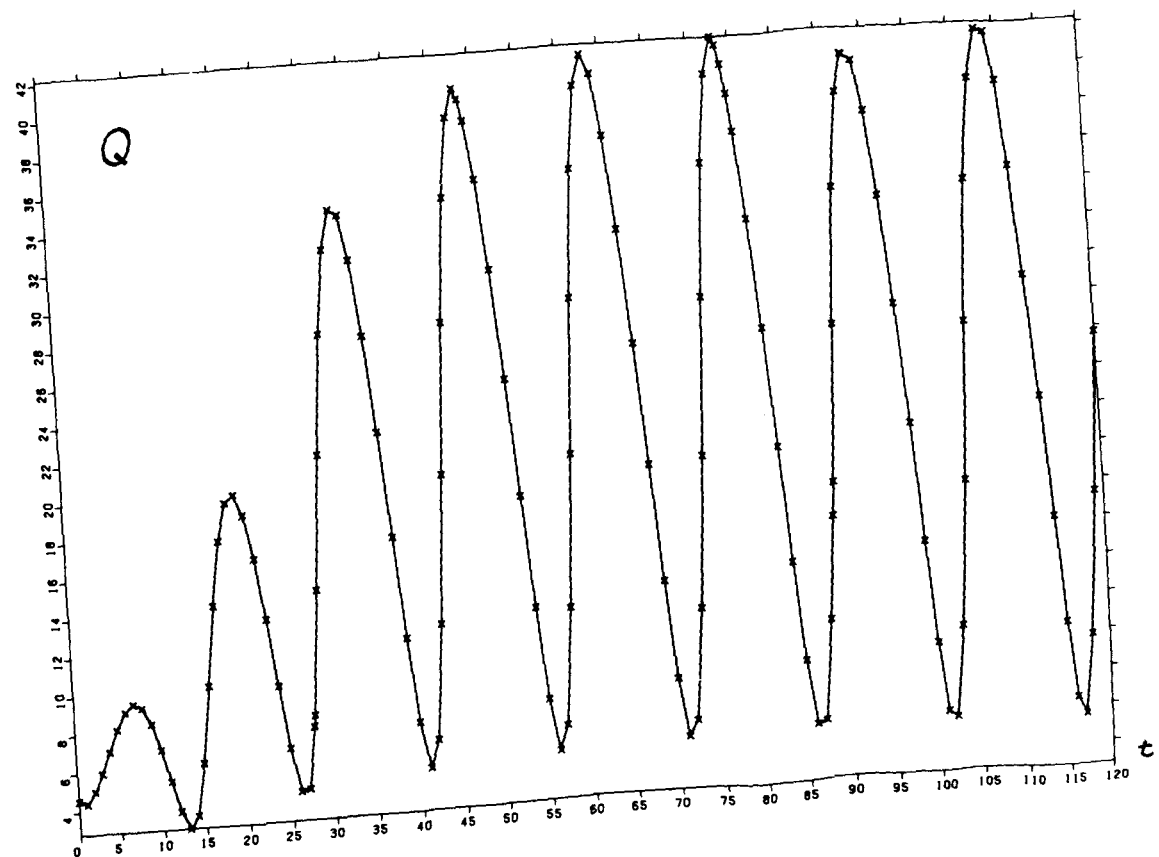


Abb. 91

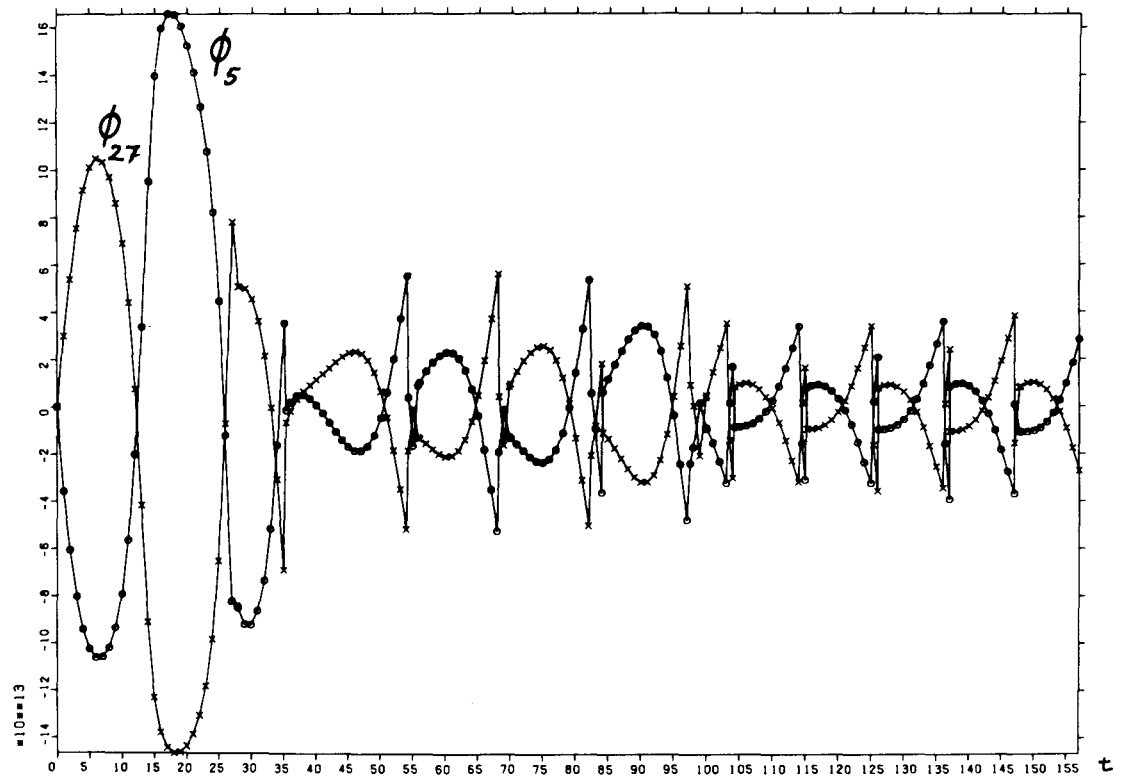


Abb. 92

